

Adam Kunysz

# Algorytmy dla skojarzeń silnie stabilnych

*rozprawa doktorska*

## Streszczenie

W tej rozprawie badamy uogólnienie problemu stabilnego skojarzenia do przypadku, w którym listy preferencji mogą zawierać remisys. Prowadzi ono do trzech różnych definicji stabilności znanych jako słaba stabilność, silna stabilność oraz super stabilność. Każde z tych trzech pojęć było wcześniej wielokrotnie badane w literaturze. W przypadku słabej stabilności klasyczne problemy związane ze stabilnymi skojarzeniami zazwyczaj okazują się być NP-trudne, a większość prac naukowych na temat tego pojęcia dotyczy algorytmów aproksymacyjnych. Z kolei większość problemów związanych z super stabilnością można rozwiązać w wydajny sposób przy pomocy redukcji do wariantu bez remisów. Co ciekawe, zrozumienie silnej stabilności jest znacznie gorsze niż pozostałych dwóch pojęć i wiele problemów związanych z tym pojęciem pozostało otwartych.

W poniższej rozprawie opisujemy wydajne algorytmy dla kilku fundamentalnych problemów związanych z silnie stabilnymi skojarzeniami. W jej skład wchodzi trzy prace, których zawartość krótko opisujemy poniżej.

1. W pracy [4], której współautorami są Pratik Ghosal i Katarzyna Paluch rozważamy problem charakteryzacji zbioru rozwiązań silnie stabilnych skojarzeń w grafach dwudzielnych. Pytanie dotyczące istnienia takiej charakteryzacji zostało postawione w 1989 roku w książce Gusfielda i Irvinga [1] i było piątym problemem na ich liście dwunastu problemów otwartych. Naszym głównym wynikiem są dwa algorytmy konstruujące dwie takie reprezentacje. Działają one odpowiednio w złożonościach  $O(nm^2)$  oraz  $O(nm)$ , gdzie  $n$  to liczba wierzchołków, a  $m$  to liczba krawędzi w grafie.

2. W pracy [2] prezentujemy algorytm o złożoności  $O(nm)$  rozwiązujący problem silnie stabilnego skojarzenia w grafach ogólnych. Wynik ten poprawia algorytm Scott'a [5], który działa w złożoności  $O(m^2)$ . Dowodzimy także, że w czasie  $O(nm)$  można skonstruować reprezentację zbioru wszystkich silnie stabilnych skojarzeń w grafach ogólnych.
3. Głównym wynikiem pracy [3] jest algorytm znajdujący silnie stabilne skojarzenie o największej wadze w grafach dwudzielnych. Algorytm działa w złożoności  $O(nm \log Wn)$ , gdzie  $W$  to maksymalna waga krawędzi w grafie. Przed pojawieniem się pracy [3] nie było wiadomo czy możliwe jest rozwiązanie tego problemu w czasie wielomianowym.

Wszystkie zaprezentowane wyniki zostały opublikowane na międzynarodowych konferencjach algorytmicznych. Charakteryzacja zbioru rozwiązań silnie stabilnych skojarzeń została przedstawiona na konferencji SODA 2016 [4]. Algorytm obliczający silnie stabilne skojarzenia w grafach ogólnych został zaprezentowany na konferencji ESA 2016 [2]. Ostatni wynik, czyli algorytm obliczający najcięższe silnie stabilne skojarzenie, został opublikowany na konferencji ISAAC 2018 [3].

Adam Kunysz

# Algorithms for Strongly Stable Matchings

*phd thesis*

## Abstract

We study a variant of the *Stable Matching* problem where preference lists may contain ties. This generalisation gives rise to three different definitions of stability, namely weak stability, strong stability and super stability. A lot of research has been done over the years on each of these three notions.

In the case of weak stability most of the classical problems related to stable matchings become NP-hard and therefore are typically studied in the approximation algorithm framework. On the other hand, most of the problems related to super stability can be efficiently solved using reductions to the case of no ties. In contrast, strong stability is not understood as well as the other two notions and a lot of problems remained open in this setting.

We develop efficient algorithms for a number of fundamental problems related to strongly stable matchings. The thesis is composed of three papers which we briefly overview below.

1. In [4], jointly with Pratik Ghosal and Katarzyna Paluch, we study the problem of characterising the set of strongly stable matching solutions in bipartite graphs. This problem whether such a characterisation exists was stated in 1989 by Gusfield and Irving in their monograph [1] as the fifth problem on their list of twelve open problems in the area. In the paper we give two algorithms for constructing two such representations. Our algorithms work in respectively  $O(nm^2)$  and  $O(nm)$  time, where  $n$  is equal to the number of vertices and  $m$  is equal to the number of edges of the underlying graph.
2. In [2] we give an  $O(nm)$  time algorithm for finding a strongly stable matching in general graphs. The result improves upon the previously

best known  $O(m^2)$  algorithm by Scott [5]. We also prove that it is possible to construct a representation of the set of strongly stable matching solutions in general graphs. The construction also takes  $O(nm)$  time.

3. The main result of the paper [3] is an algorithm for computing a maximum weight strongly stable matching in bipartite graphs. The runtime of this algorithm is  $O(nm \log Wn)$ , where  $W$  is equal to the maximal weight of an edge in the graph. Prior to the publication of [3] it was unknown whether the problem was solvable in polynomial time.

The aforementioned results have appeared in proceedings of international algorithmic conferences. The paper on the characterisation of the set of strongly stable matchings was presented at SODA 2016 [4]. The algorithm for the computation of a strongly stable matching in general graphs was published in the proceedings of ESA 2016 [2]. Lastly, the algorithm for finding a maximum weight strongly stable matching was presented at ISAAC 2018 [3].

# Bibliography

- [1] Dan Gusfield and Robert W. Irving. *The Stable marriage problem - structure and algorithms*. Foundations of computing series. MIT Press, 1989.
- [2] Adam Kunysz. The strongly stable roommates problem. In Piotr Sankowski and Christos D. Zaroliagis, editors, *24th Annual European Symposium on Algorithms, ESA 2016, August 22-24, 2016, Aarhus, Denmark*, volume 57 of *LIPICs*, pages 60:1–60:15. Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum fuer Informatik, 2016.
- [3] Adam Kunysz. An algorithm for the maximum weight strongly stable matching problem. In Wen-Lian Hsu, Der-Tsai Lee, and Chung-Shou Liao, editors, *29th International Symposium on Algorithms and Computation, ISAAC 2018, December 16-19, 2018, Jiaoxi, Yilan, Taiwan*, volume 123 of *LIPICs*, pages 42:1–42:13. Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum fuer Informatik, 2018.
- [4] Adam Kunysz, Katarzyna E. Paluch, and Pratik Ghosal. Characterisation of strongly stable matchings. In *Proceedings of the Twenty-Seventh Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, SODA 2016, Arlington, VA, USA, January 10-12, 2016*, pages 107–119, 2016.
- [5] Sandy Scott. *A study of stable marriage problems with ties*. PhD thesis, University of Glasgow, 2005.