

## Autoreferat rozprawy habilitacyjnej

**Imię i nazwisko:** Paweł Woźny

### Dyplomy i stopnie naukowe

- Magister informatyki — Instytut Informatyki Uniwersytetu Wrocławskiego, rok 2001.
- Magister matematyki — Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego, rok 2003.
- Doktor nauk matematycznych w zakresie informatyki — Instytut Informatyki Uniwersytetu Wrocławskiego, rok 2005, tytuł rozprawy: *Własności współczynników Fouriera względem semiklasycznych wielomianów ortogonalnych*, promotor: prof. Stanisław Lewanowicz.

### Informacja o dotychczasowym zatrudnieniu

- od 1 X 2004 r. do 30 IX 2005 r.: asystent w Instytucie Informatyki Uniwersytetu Wrocławskiego.
- od 1 X 2005 r.: adiunkt w Instytucie Informatyki Uniwersytetu Wrocławskiego.

### Wskazanie osiągnięcia naukowego

W skład rozprawy habilitacyjnej zatytułowanej *Bazy Bernsteina: dualność i zastosowania* wchodzi następujące prace.

- [H1] S. Lewanowicz, P. Woźny, *Connections between two-variable Bernstein and Jacobi polynomials on the triangle*, Journal of Computational and Applied Mathematics 197 (2006) 520–533.
- [H2] S. Lewanowicz, P. Woźny, *Dual generalized Bernstein basis*, Journal of Approximation Theory 138 (2006) 129–150.
- [H3] S. Lewanowicz, P. Woźny, *Two-variable orthogonal polynomials of big  $q$ -Jacobi type*, Journal of Computational and Applied Mathematics 233 (2010) 1554–1561.
- [H4] P. Woźny, *Simple algorithms for computing the Bézier coefficients of the constrained dual Bernstein polynomials*, Applied Mathematics and Computation 219 (2012) 2521–2525.
- [H5] P. Woźny, S. Lewanowicz, *Constrained multi-degree reduction of triangular Bézier surfaces, using dual Bernstein polynomials*, Journal of Computational and Applied Mathematics 235 (2010) 785–804.
- [H6] P. Woźny, S. Lewanowicz, *Multi-degree reduction of Bézier curves with constraints, using dual Bernstein basis polynomials*, Computer Aided Geometric Design 26 (2009) 566–579.

W paragrafie 1 omówiono pewne rodzaje baz Bernsteina, które były badane przez autora. Przedstawiono tam także ich związki z rodzinami wielomianów ortogonalnych, a w szczególności część wyników pracy [H1]. Wspomniano też o zastosowaniach baz Bernsteina w grafice komputerowej.

Główne tezy artykułów [H2] i [H4], jak również pewne wyniki z prac [H1], [H5], [H6], opisano w paragrafie 2, gdzie skupiono się na własnościach i reprezentacji dualnych baz Bernsteina różnych rodzajów.

Paragraf 3 zawiera streszczenia prac [H3], [H5] i [H6], dotyczących zastosowań baz Bernsteina i dualnych baz Bernsteina.

W paragrafach 4 i 5 opisano pokrótce inne wyniki uzyskane przez autora, które nie weszły w skład rozprawy habilitacyjnej oraz przybliżono aktualnie prowadzone badania.

## 1. Bazy Bernsteina

Minęło właśnie sto lat od momentu, gdy S. N. Bernstein (1880–1968) podał swój dowodu słynnego twierdzenia Weierstrassa mówiącego, że zbiór wielomianów jest gęsty w przestrzeni funkcji ciągłych w przedziale domkniętym. Jak wiadomo, dowód ten wykorzystywał istotnie wielomiany postaci

$$B_k^n(x) := \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \quad (0 \leq k \leq n; n \in \mathbb{N})$$

nazwane obecnie *wielomianami Bernsteina*.

W ciągu ostatnich dziesięcioleci *bazy Bernsteina* doczekały się wielu uogólnień i zastosowań, głównie w teorii aproksymacji i grafice komputerowej. W niniejszym autoreferacie streszczamy najważniejsze wyniki dotyczące tego tematu uzyskane przez autora w ciągu ostatnich 8 lat.

### 1.1. Uogólnienia wielomianów Bernsteina

W ostatnim czasie pojawiło się wiele różnego rodzaju modyfikacji i uogólnień baz Bernsteina. W paragrafie tym przywołujemy te z nich, które związane są z wynikami uzyskanymi w pracach wchodzących w skład niniejszego autoreferatu.

I tak, w roku 1996 Phillips [53] wprowadził tzw. *kwantowe wielomiany Bernsteina*  $b_i^n(x; q)$  zależne od parametru rzeczywistego  $q \neq 1$  i zadane wzorem

$$b_i^n(x; q) := \left[ \begin{matrix} n \\ i \end{matrix} \right]_q x^i (x; q)_{n-i} \quad (0 \leq i \leq n; n \in \mathbb{N}), \quad (1.1)$$

gdzie  $(c; q)_k$  ( $k = 0, 1, \dots$ ) jest *symbolem  $q$ -Pochhammera*,

$$(c; q)_0 := 1, \quad (c; q)_k := \prod_{j=0}^{k-1} (1 - cq^j) \quad (k \geq 1), \quad (1.2)$$

natomiast

$$\left[ \begin{matrix} n \\ i \end{matrix} \right]_q := \frac{(q; q)_n}{(q; q)_i (q; q)_{n-i}} \quad (i = 0, 1, \dots, n; n \in \mathbb{N}) \quad (1.3)$$

jest *symbolem  $q$ -Newtona*. Wielomiany te szybko stały się bardzo popularne o czym świadczyć może mnogość prac dotyczących ich własności, zastosowań (głównie w teorii aproksymacji) i uogólnień. Patrz artykuł [54] podsumowujący ostatnie wyniki związane z tym rodzajem wielomianów Bernsteina i prace tam cytowane.

Osiem lat później Lewanowicz i Woźny w [36] zdefiniowali i zbadali *uogólnione wielomiany Bernsteina*

$$B_i^n(x; \omega|q) := \frac{1}{(\omega; q)_n} \left[ \begin{matrix} n \\ i \end{matrix} \right]_q x^i (\omega x^{-1}; q)_i (x; q)_{n-i} \quad (i = 0, 1, \dots, n; n \in \mathbb{N}), \quad (1.4)$$

gdzie  $q$  i  $\omega$  są parametrami rzeczywistymi, przy czym  $q \neq 1$  oraz  $\omega \neq 1, q^{-1}, \dots, q^{1-n}$ . Zauważmy, że zarówno *klasyczne wielomiany Bernsteina*  $B_i^n$ , *dyskretne wielomiany Bernsteina* [48], [65], [66]

$$\beta_i^n(x; N) := \frac{1}{(-N)} \binom{n}{i} (-x)_i (x - N)_i \quad (0 \leq i \leq n \leq N; i, n, N \in \mathbb{N}), \quad (1.5)$$

gdzie  $(a)_k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) jest *symbolem Pochhammera*,

$$(a)_0 := 1, \quad (a)_k := a(a+1) \cdots (a+k-1) \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (1.6)$$

jak również kwantowe wielomiany Bernsteina  $b_i^n$  są postaciami specjalnymi lub granicznymi uogólnionych wielomianów Bernsteina:

$$\begin{aligned} \lim_{q \uparrow 1} B_i^n(x; \omega|q) &= B_i^n\left(\frac{x-\omega}{1-\omega}\right), \\ \lim_{q \uparrow 1} B_i^n(q^{-x}; q^{-N}|q) &= \beta_{n-i}^n(x; N), \\ B_i^n(x; 0|q) &= b_i^n(x; q). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Dodajmy, że własnościom wprowadzonych w [36, str. 64] operatorów aproksymacyjnych związanych z wielomianami  $B_i^n(x; \omega|q)$  poświęcone są prace Wanga [73] i [74] oraz artykuł [25]. Natomiast wielowymiarowym wariantem uogólnionych wielomianów Bernsteina zajmowano się w artykule [40] (patrz też paragrafy 1.2 i 3.3).

### 1.2. Bazy Bernsteina a wielomiany ortogonalne

W roku 1987 Ciesielski [12] podał następującą relację łączącą *przesunięte wielomiany Jacobiego*  $R_i^{(\alpha, \beta)}(x)$  (patrz np. [H2, wzór (5.1)]), *dualne wielomiany Hahna*  $R_j(\lambda(t); a, b, N)$  (patrz np. [31] oraz [H2, str. 145]) i wielomiany Bernsteina:

$$R_i^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(\alpha+1)_i}{i!} \sum_{j=0}^n R_{n-j}(\lambda(i); \alpha, \beta, n) \cdot B_j^n(x) \quad (0 \leq i \leq n).$$

Koneksję odwrotną rozważano w [64]. Pokazano tam, że (por. z [H2, wzór (5.4)])

$$B_i^n(x) = \sum_{j=0}^n U_j Q_j(i; \beta, \alpha, n) \cdot R_j^{(\alpha, \beta)}(x) \quad (0 \leq i \leq n),$$

gdzie  $U_j$  są znanymi wielkościami, a  $Q_j(t; a, b, N)$  — *wielomianami Hahna* (patrz np. [31] lub [H2, str. 145]).

Podobne relacje łączą uogólnione wielomiany Bernsteina (1.4), *duże kwantowe wielomiany Jacobiego*  $P_j(x; a, b, c; q)$ , *kwantowe wielomiany Hahna*  $Q_j(x; a, b, N|q)$  oraz *dualne kwantowe wielomiany Hahna*  $R_j(\mu(t); a, b, N|q)$  (patrz np. [31] oraz [36, str. 72 i 76]):

$$P_i(x; a, b, \omega/q; q) = \sum_{j=0}^n R_{n-j}(\mu(i); a, b, n|q) \cdot B_{n-j}^n(x; \omega|q), \quad (1.8)$$

$$B_{n-i}^n(x; \omega|q) = \sum_{j=0}^n V_j Q_j(q^{-i}; a, b, n|q) \cdot P_j(x; a, b, \omega/q; q), \quad (1.9)$$

gdzie  $0 \leq i \leq n$ , a  $V_j$  są znanymi wielkościami. Zobacz [36].

Dodajmy, że z podanych wzorów wynikają także koneksje zachodzące pomiędzy kwantowymi wielomianami Bernsteina (1.1) i *małymi kwantowymi wielomianami Jacobiego* (zob. np. [31] lub [H2, str. 141]), które uzyskano wcześniej w [3].

Zależności te wykorzystano m.in. w [H2] i [H6], np. do znalezienia jawnej postaci *dualnych uogólnionych wielomianów Bernsteina* i udowodnienia wielu ich własności (patrz §2 i §3).

W [H1] uzyskano podobne wyniki w wypadku *trójkątnych wielomianów Bernsteina* dwu zmiennych

$$B_{i,j}^n(x, y) := \binom{n}{i, j} x^i y^j (1-x-y)^{n-i-j} \quad (0 \leq i+j \leq n; i, j, n \in \mathbb{N}) \quad (1.10)$$

i trójkątnych wielomianów Jacobiego  $P_{n,k}^{(\alpha,\beta,\gamma)}(x,y)$ , które zostały wprowadzone przez Koornwinder w [32] (zobacz też [H1, wzór (1.6)]). Udowodniono tam, że współczynniki koneksji pomiędzy wspomnianymi rodzinami wielomianów można zidentyfikować jako *wielomiany Hahna dwu zmiennych*  $H_{n,k}(s,t;a,b,c,N)$  [27], [63], [72] (patrz też [H1, wzór (1.13)]). Dokładniej, zachodzą następujące tożsamości [H1]:

$$\begin{aligned} B_{i,j}^n(x,y) &= \sum_{0 \leq k \leq m \leq n} E_{m,k} H_{m,k}(j, n-i-j, \alpha - \frac{1}{2}, \beta - \frac{1}{2}, \gamma - \frac{1}{2}, n) \cdot P_{m,k}^{(\alpha,\beta,\gamma)}(x,y), \\ P_{m,k}^{(\alpha,\beta,\gamma)}(x,y) &= \sum_{0 \leq i+j \leq n} G_{i,j} H_{m,k}(j, n-i-j, \alpha - \frac{1}{2}, \beta - \frac{1}{2}, \gamma - \frac{1}{2}, n) \cdot B_{i,j}^n(x,y), \end{aligned} \quad (1.11)$$

gdzie  $0 \leq i+j \leq n$ ,  $0 \leq k \leq m \leq n$ , natomiast  $E_{m,k}$  i  $G_{i,j}$  są znanymi wielkościami (patrz [H1, wzory (2.2), (2.14)]).

Dodajmy, że wzory te pozwoliły podać jawną postać tzw. *dualnych trójkątnych wielomianów Bernsteina*, którymi zajmujemy się w paragrafie 2.3.1 (patrz też §3.2). Są one także podstawą metody obniżania stopnia trójkątnych płatów Béziera opracowanej przez Hu i Wanga w [22].

W pracy [H3] wprowadzono i zbadano *duże kwantowe wielomiany Jacobiego dwu zmiennych*. W [40] wykazano m.in., że są one związane w podobny sposób z tzw. *uogólnionymi wielomianami Bernsteina dwu zmiennych* (zob. (3.7)). W tym wypadku, współczynniki koneksji wyrażają się przez *kwantowe wielomiany Hahna dwu zmiennych* wprowadzone przez Gaspera i Rahmana w [18]. Patrz wzór (3.8). Obserwacja ta została istotnie wykorzystana w dowodzie cząstkowego równania  $q$ -różnicowego spełnianego przez duże kwantowe wielomiany Jacobiego dwu zmiennych (patrz twierdzenie 3.4). Ten i inne wyniki artykułu [H3] streszczamy w §3.3.

### 1.3. Bazy Bernsteina w grafice komputerowej

Ogólnie znane są szerokie zastosowania klasycznych baz Bernsteina w teorii aproksymacji. Jednak chyba jeszcze większe znaczenie odgrywają one w grafice komputerowej, gdzie związane z nimi parametryczne *krzywe i powierzchnie Béziera* są jednym z podstawowych narzędzi. Zobacz np. [16].

Ze względów praktycznych ważne są np. zadania *obniżania stopnia* krzywych i płatów Béziera, którymi autor zajmował się w artykułach [H5], [H6], [39] i [41]. Część z uzyskanych tam wyników opisujemy w paragrafach 3.1 i 3.2.

Warto wspomnieć, że pojawiły się także prace wprowadzające krzywe i powierzchnie Béziera odpowiadające kwantowym i uogólnionym wielomianom Bernsteina (por. (1.1), (1.4)). Zobacz np. [7], [8], [50], [51] (krzywe i powierzchnie  $q$ -Béziera) oraz [36], [40] (uogólnione krzywe i płaty Béziera).

Ostatnio, w serii prac Simeonov, Zafiriz i Goldman zajmowali się różnego rodzaju uogólnieniami krzywych Béziera. Rozszerzyli oni, popularną m.in. w grafice komputerowej, technikę zwaną *blossomingiem* (zobacz np. [62]) wprowadzając tzw.  $q$ -*blossoming*, a w swoich badaniach istotnie wykorzystali własności uogólnionych wielomianów Bernsteina  $B_i^n(x;\omega|q)$ . Patrz [19], [68], [69].

## 2. Dualność

Niech dane będą liniowo niezależne funkcje  $b_0, b_1, \dots, b_n$ . Rozważmy przestrzeń liniową  $\mathcal{B}_n$  rozpiętą na tych funkcjach z iloczynem skalarnym  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{B}_n \times \mathcal{B}_n \rightarrow \mathbb{C}$ . Mówimy, że funkcje

$$d_0^{(n)}, d_1^{(n)}, \dots, d_n^{(n)}$$

tworzą *bazę dualną* (są *funkcjami dualnymi*) przestrzeni  $\mathcal{B}_n$  względem iloczynu skalarnego  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , jeśli spełnione są następujące warunki:

$$\begin{cases} \text{lin} \{d_0^{(n)}, d_1^{(n)}, \dots, d_n^{(n)}\} = \mathcal{B}_n, \\ \langle b_i, d_j^{(n)} \rangle = \delta_{ij} \quad (0 \leq i, j \leq n), \end{cases} \quad (2.1)$$

gdzie  $\delta_{ii} = 1$ , a  $\delta_{ij} = 0$  dla  $i \neq j$ .

Wskażmy na pewne ważne własności baz dualnych związanych z reprezentacją elementów przestrzeni  $\mathcal{B}_n$  i aproksymacją średniokwadratową w przestrzeni unormowanej  $(\mathcal{B}_n, \|\cdot\|)$ , gdzie  $\|\cdot\| := \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ .

Funkcja  $g \in \mathcal{B}_n$  ma następującą reprezentację w bazie  $b_0, b_1, \dots, b_n$ :

$$g = \sum_{k=0}^n a_k b_k, \quad \text{gdzie} \quad a_k := \langle g, d_k^{(n)} \rangle \quad (k = 0, 1, \dots, n).$$

Element  $p^*$ ,

$$p^* := \sum_{k=0}^n c_k b_k, \quad \text{gdzie} \quad c_k := \langle f, d_k^{(n)} \rangle \quad (k = 0, 1, \dots, n),$$

najlepiej przybliża funkcję  $f$  w zbiorze  $\mathcal{B}_n$  w sensie *aproksymacji średniokwadratowej*, tzn.

$$\|f - p^*\| = \min_{p \in \mathcal{B}_n} \|f - p\|.$$

Zauważmy, że pozwala to na znalezienie elementu optymalnego bez odwoływania się do bazy ortogonalnej rozważanej przestrzeni.

Biorąc pod uwagę podane własności, bazy dualne są ostatnio intensywnie badane i znajdują wiele interesujących zastosowań, szczególnie w zadaniach aproksymacyjnych związanych z algorytmami numerycznymi i grafiką komputerową. Zobacz np. [5, 11, 26, 38, 39, 41, 43, 57, 58], [H1, H2, H4, H5, H6] (dualne wielomiany Bernsteina), [20] (dualne bazy wielomianowe), [21, 75, 80] (dualne funkcje i funkcjonały B-sklejane), [4, 83–85] (uogólnione dualne bazy typu Balla), [86] (dualne bazy typu NS).

W [H2] pokazano jak znaleźć bazę dualną, gdy dysponujemy bazą ortogonalną  $p_0, p_1, \dots, p_n$  przestrzeni  $\mathcal{B}_n$  względem iloczynu skalarnego  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , tzn.

$$\begin{cases} \text{lin} \{p_0, p_1, \dots, p_n\} = \mathcal{B}_n, \\ \langle p_i, p_j \rangle = h_i \delta_{ij} \quad (0 \leq i, j \leq n; h_i \neq 0). \end{cases}$$

Mianowicie, zachodzi następujące twierdzenie.

**Twierdzenie 2.1** ([H2]). *Niech dane będą takie współczynniki  $\alpha_{ki}$  i  $\beta_{kj}$ , dla których*

$$p_k = \sum_{i=0}^n \alpha_{ki} b_i, \quad b_k = \sum_{j=0}^n \beta_{kj} p_j \quad (k = 0, 1, \dots, n).$$

*Wtedy elementy bazy dualnej wyrażają się wzorami*

$$d_i^{(n)} = \sum_{k=0}^n h_k^{-1} \alpha_{ki} p_k \quad (i = 0, 1, \dots, n),$$

*natomiast elementy  $p_0, p_1, \dots, p_n$  bazy ortogonalnej mają następującą reprezentację w bazie dualnej:*

$$p_i = h_i \sum_{k=0}^n \beta_{ki} d_k^{(n)} \quad (i = 0, 1, \dots, n).$$

Korzystając z przywołanego twierdzenia udało się uzyskać wiele interesujących wyników dotyczących własności i zastosowań tzw. *dualnych baz Bernsteina*, którym poświęcamy dużo miejsca w tym i w następnym paragrafie.

Dodajmy, że proste i numerycznie efektywne algorytmy konstrukcji baz dualnych, które nie wymagają odwracania macierzy pełnej i nie odwołują się do znajomości bazy ortogonalnej rozważanej przestrzeni zostały ostatnio przedstawione przez autora w [75] i [80] (patrz też §5).

W §2.1 zajmujemy się różnymi rodzajami *dualnych wielomianów Bernsteina* jednej zmiennej. Następnie, w paragrafie 2.2, przedstawiamy wyniki dotyczące wyznaczania tzw. *postaci Béziera* dualnych wielomianów Bernsteina. Natomiast w §2.3 opisujemy rodziny *dualnych wielomianów Bernsteina dwu zmiennych*.

Wyniki przywołane we wspomnianych paragrafach odegrały kluczową rolę w algorytmach obniżania stopnia krzywych i powierzchni Béziera zaproponowanych w [H5], [H6], [39] i [41] (patrz też §§3, 4). Większość z nich została zaprezentowana w referacie wygłoszonym przez autora na zaproszenie prof. prof. C. Brezinskiego (Université des Sciences et Technologies de Lille, Francja) i W. Gautschiego (Purdue University, USA) podczas konferencji *International Conference on Scientific Computing*, S. Margherita di Pula, Sardynia, Włochy, 9–14 października 2011 r.

### 2.1. Dualne bazy Bernsteina jednej zmiennej

Poniżej podajemy definicje i ważniejsze własności *dualnych uogólnionych wielomianów Bernsteina*, *dualnych wielomianów Bernsteina* oraz *dualnych dyskretnych wielomianów Bernsteina*, uzyskane w pracach [H2] i [H6].

#### 2.1.1. Dualne uogólnione wielomiany Bernsteina

Przyjmijmy, że  $q \in (0, 1)$ . Niech  $\Pi_n$  oznacza przestrzeń wielomianów stopnia  $\leq n$ . Niech  $B_j^n(x; \omega|q)$  ( $0 \leq j \leq n$ ) będą uogólnionymi wielomianami Bernsteina [36] (patrz wzór (1.4)). Rozważmy iloczyn skalarny postaci

$$\langle f, g \rangle_{bqJ} := \int_{\omega}^{aq} \frac{(x/a, qx/\omega; q)_{\infty}}{(x, bqx/\omega; q)_{\infty}} f(x)g(x) d_q x \quad (0 < aq, bq < 1, \omega < 0), \quad (2.2)$$

gdzie

$$\int_a^b f(x) d_q x := b(1-q) \sum_{k=0}^{\infty} f(bq^k)q^k - a(1-q) \sum_{k=0}^{\infty} f(aq^k)q^k \quad (2.3)$$

jest tzw. *q-calłkq*, natomiast

$$(c_1, c_2, \dots, c_t; q)_{\infty} := (c_1; q)_{\infty} (c_2; q)_{\infty} \cdots (c_t; q)_{\infty}, \quad (2.4)$$

gdzie z kolei  $(c; q)_{\infty} := \prod_{j=0}^{\infty} (1 - cq^j)$  (por. z (1.2)).

*Dualne uogólnione wielomiany Bernsteina* stopnia  $n \in \mathbb{N}$

$$D_0^n(x; a, b, \omega|q), D_1^n(x; a, b, \omega|q), \dots, D_n^n(x; a, b, \omega|q) \in \Pi_n,$$

wprowadzone w [H2], definiujemy w następujący sposób:

$$\langle D_i^n(\cdot; a, b, \omega|q), B_j^n(\cdot; \omega|q) \rangle_{bqJ} = \delta_{ij} \quad (0 \leq i, j \leq n).$$

Przypomnijmy, że duże kwantowe wielomiany Jacobiego  $P_k(x; a, b, \omega/q; q)$  (patrz np. [31] oraz [H2, wzór (3.4)]) są ortogonalne względem iloczynu skalarnego (2.2) oraz że są one związane z uogólnionymi wielomianami Bernsteina relacjami (1.8) i (1.9). Z faktów tych wynikają (por. twierdzenie 2.1) poniższe reprezentacje wielomianów  $D_j^n(x; a, b, \omega|q)$  oraz  $P_i(x; a, b, \omega/q; q)$ , których współczynniki wyrażają się, odpowiednio, przez kwantowe wielomiany Hahna  $Q_k(t; a, b, n|q)$  i dualne kwantowe wielomiany Hahna  $R_j(\mu(t); a, b, n|q)$  (patrz np. [31] oraz [H2, wzory (3.8), (3.9)]).

**Twierdzenie 2.2** ([H2]). *Dualne uogólnione wielomiany Bernsteina są następującą kombinacją liniową dużych kwantowych wielomianów Jacobiego:*

$$D_j^n(x; a, b, \omega|q) = \sum_{k=0}^n F_k Q_k(q^{j-n}; a, b, n|q) \cdot P_k(x; a, b, \omega/q; q) \quad (0 \leq j \leq n), \quad (2.5)$$

gdzie  $F_k$  są znanymi wielkościami (patrz [H2, wzór (3.18)]). Natomiast duże kwantowe wielomiany Jacobiego mają następującą reprezentację w bazie dualnych uogólnionych wielomianów Bernsteina:

$$P_i(x; a, b, \omega/q; q) = \sum_{j=0}^n G_j R_{n-j}(\mu(i); a, b, n|q) \cdot D_j^n(x; a, b, \omega|q) \quad (0 \leq i \leq n) \quad (2.6)$$

dla znanych wielkości  $G_j$  (por. [H2, wzór (3.17)]).

Tak więc, wzory (2.5) i (2.6) łączą ze sobą dualne uogólnione wielomiany Bernsteina i trzy rodziny wielomianów ortogonalnych, tzn. duże kwantowe wielomianami Jacobiego, kwantowe wielomiany Hahna i dualne kwantowe wielomiany Hahna.

W [H2] pokazano także, że wielomiany dualne  $D_j^n(x; a, b, \omega|q)$  ( $0 \leq j \leq n$ ) mogą być przedstawione jako krótka kombinacja liniowa  $\min(j, n-j) + 1$  dużych kwantowych wielomianów Jacobiego z przesuniętymi parametrami lub argumentem.

**Twierdzenie 2.3** ([H2]). *Dla  $j = 0, 1, \dots, n$  prawdziwe są wzory*

$$D_j^n(x; a, b, \omega|q) = S_{n,j} \sum_{k=0}^j (bq^{j+1})^k \frac{(q^{-j}; q)_k (\omega q^{-n-1}/ab; q)_k}{(\omega q; q)_k (q^{-n}/a; q)_k} P_{n-k}(x; a, bq^{k+1}, \omega q^k; q),$$

$$D_{n-j}^n(x; a, b, \omega|q) = T_{n,j} \sum_{k=0}^j (abq^{n+3})^k \frac{(q^{-j}; q)_k (\omega q^{-n-1}/ab; q)_k}{(aq^2; q)_k (\omega q; q)_k} P_{n-k}(q^{k+1}x; aq^{k+1}, b, \omega q^k; q),$$

gdzie  $S_{n,j}, T_{n,j}$  są znanymi wielkościami (por. [H2, wzory (3.21)–(3.23)]).

Interesująca wydaje się też prosta zależność łącząca dualne uogólnione wielomiany Bernsteina stopnia  $n$  i  $n+1$  z dużymi kwantowymi wielomianami Jacobiego.

**Twierdzenie 2.4** ([H2]). *Zachodzi następująca zależność rekurencyjna:*

$$D_i^{n+1}(x; a, b, \omega|q) = \gamma_i^n D_i^n(x; a, b, \omega|q) + (1 - \gamma_i^n) D_{i-1}^n(x; a, b, \omega|q) + \vartheta_i^n P_{n+1}(x; a, b, \omega/q; q),$$

gdzie  $0 \leq i \leq n+1$ ,  $D_{-1}^n(x; a, b, \omega|q) = D_{n+1}^n(x; a, b, \omega|q) = 0$ ,  $\gamma_i^n := (q^{n-i+1} - 1)/(q^{n+1} - 1)$ , a  $\vartheta_i^n$  jest znaną wielkością (patrz [H2, wzór (3.15)]).

Dodajmy jeszcze, że autorzy streszczanej tu pracy uzyskali wyniki analogiczne do podanych wyżej także w wypadku wielomianów dualnych do kwantowych wielomianów Bernsteina  $b_i^n(x; q)$  (patrz wzór (1.1)) względem iloczynu skalarnego związanego z małymi przesuniętymi kwantowymi wielomianami Jacobiego. Patrz [H2, §4].

### 2.1.2. Dualne wielomiany Bernsteina

W roku 1987 Ciesielski [11] wprowadził dualne wielomiany Bernsteina  $D_j^n \in \Pi_n$  ( $j = 0, 1, \dots, n$ ;  $n \in \mathbb{N}$ ) zdefiniowane w następujący sposób:

$$\langle D_j^n, B_i^n \rangle_L = \delta_{ij} \quad (0 \leq i, j \leq n), \quad (2.7)$$

gdzie  $B_i^n$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) są klasycznymi wielomianami Bernsteina, a

$$\langle f, g \rangle_L := \int_0^1 f(x)g(x) dx. \quad (2.8)$$

Podał on m.in. zależność rekurencyjną łączącą dualne wielomiany Bernsteina stopnia  $n$ ,  $n+1$  i wielomiany Legendre'a (patrz np. [31, §1.8.3]), które są ortogonalne względem iloczynu skalarnego (2.8).

W 1998 Jüttler [26] znalazł tzw. *postać Béziera* wielomianów dualnych  $D_j^n$ , tj. przedstawił je jako kombinację liniową wielomianów Bernsteina. W kontekście pewnych zadań aproksymacyjnych, dotyczących m.in. grafiki komputerowej, Jüttler rozważał też *dualne wielomiany Bernsteina z ograniczeniami*  $D_i^{(n,k)} \in \Pi_n^{(k)}$  ( $i = k, k+1, \dots, n-l$ ) spełniające warunki

$$\langle D_j^{(n,k)}, B_i^n \rangle_L = \delta_{ij} \quad (k \leq i, j \leq n-k),$$

gdzie  $\Pi_n^{(k)}$  jest przestrzenią wielomianów, których pochodne rzędu  $\leq k-1$  znikają dla  $t=0$  i  $t=1$ . Patrz też [57], [58]. Więcej o postaci Béziera dualnych wielomianów Bernsteina z ograniczeniami piszemy w paragrafie 2.2, gdzie przedstawiono wyniki pracy [H4].

W [H2, §5] rozszerzono definicję dualnych wielomianów Bernsteina stosując iloczyn skalarny, względem którego ortogonalne są *przesunięte wielomiany Jacobiego*  $R_k^{(\alpha,\beta)}$  (patrz np. [H2, wzór (5.1)]), tzn.

$$\langle f, g \rangle_J := \int_0^1 (1-x)^\alpha x^\beta f(x)g(x) dx \quad (\alpha, \beta > -1). \quad (2.9)$$

Dokładniej, rozważano tam *dualne wielomiany Bernsteina* stopnia  $n \in \mathbb{N}$

$$D_0^n(x; \alpha, \beta), D_1^n(x; \alpha, \beta), \dots, D_n^n(x; \alpha, \beta) \in \Pi_n \quad (2.10)$$

spełniające następujące warunki:

$$\langle D_j^n(\cdot; \alpha, \beta), B_i^n \rangle_J = \delta_{ij} \quad (i, j = 0, 1, \dots, n).$$

Oczywiście  $D_i^n(x; 0, 0) = D_i^n(x)$ , gdzie  $D_i^n$  są wielomianami dualnymi wprowadzonymi przez Ciesielskiego.

W wypadku dualnych wielomianów Bernsteina można uzyskać wyniki podobne do tych, które podano w paragrafie 2.1.1 dla wielomianów  $D_i^n(x; a, b, \omega|q)$ . W tym celu wystarczy wykorzystać zależność graniczną (1.7), łączącą uogólnione wielomiany Bernsteina i klasyczne wielomiany Bernsteina, oraz przejścia graniczne zachodzące pomiędzy *kwantowymi* i *klasycznymi* wielomianami ortogonalnymi (zob. np. [31, §4]). Patrz [H2, §5].

W szczególności pokazano tam, że wielomiany dualne  $D_i^n(x; \alpha, \beta)$  mają następującą reprezentację w bazie przesuniętych wielomianów Jacobiego  $R_k^{(\alpha,\beta)}(x)$ :

$$D_i^n(x; \alpha, \beta) = K^{-1} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{(2k/\sigma + 1)(\sigma)_k}{(\alpha + 1)_k} Q_k(i; \beta, \alpha, n) \cdot R_k^{(\alpha,\beta)}(x) \quad (0 \leq i \leq n), \quad (2.11)$$

gdzie  $\sigma := \alpha + \beta + 1$ ,  $K := \Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\beta + 1)/\Gamma(\sigma + 1)$ , a  $(c)_k$  jest symbolem Pochammera (1.6). Natomiast koneksja odwrotna ma postać

$$R_i^{(\alpha,\beta)}(x) = \sum_{k=0}^n Z_k Q_i(k; \alpha, \beta, n) \cdot D_{n-k}^n(x; \alpha, \beta) \quad (2.12)$$

dla  $i = 0, 1, \dots, n$  oraz znanych wielkości  $Z_k$ . Patrz [H2, twierdzenie 5.2].

Jak widać, współczynniki podanych reprezentacji wyrażają się przez wielomiany Hahna  $Q_k(t; \alpha, \beta, N)$  (patrz np. [31] lub [H2, str. 145]).

We wspomnianej pracy udowodniono też, że wielomian dualny  $D_i^n(x; \alpha, \beta)$  może być wyrażony przez *krótką* kombinację liniową  $\min(i, n-i) + 1$  przesuniętych wielomianów Jacobiego z przesuniętymi parametrami,

$$\begin{aligned} D_i^n(x; \alpha, \beta) &= \frac{(-1)^{n-i}(\sigma + 1)_n}{K(\alpha + 1)_{n-i}(\beta + 1)_i} \sum_{k=0}^i \frac{(-i)_k}{(-n)_k} R_{n-k}^{(\alpha,\beta+k+1)}(x), \\ D_{n-i}^n(x; \alpha, \beta) &= \frac{(-1)^i(\sigma + 1)_n}{K(\alpha + 1)_i(\beta + 1)_{n-i}} \sum_{k=0}^i (-1)^k \frac{(-i)_k}{(-n)_k} R_{n-k}^{(\alpha+k+1,\beta)}(x), \end{aligned}$$



gdzie  $i = 0, 1, \dots, n$ . Patrz [H2, wniosek 5.4]. Zauważmy, że współczynniki podanych rozwinięć nie zależą od parametrów  $\alpha$  i  $\beta$  (porównaj z twierdzeniem 2.3).

Podano tam także następujący związek rekurencyjny:

$$D_i^{n+1}(x; \alpha, \beta) = \left(1 - \frac{i}{n+1}\right) D_i^n(x; \alpha, \beta) + \frac{i}{n+1} D_{i-1}^n(x; \alpha, \beta) + \varpi_i^n R_{n+1}^{(\alpha, \beta)}(x),$$

gdzie  $0 \leq i \leq n+1$ ,  $D_{-1}^n(x; \alpha, \beta) = D_{n+1}^n(x; \alpha, \beta) = 0$ , a  $\varpi_i^n$  jest znaną wielkością. Patrz [H2, twierdzenie 5.1]. Dodajmy, że w wypadku  $\alpha = \beta = 0$  związek ten został znaleziony wcześniej przez Ciesielskiego w [11].

Ważną rolę w szybkim algorytmie obniżania stopnia krzywych Béziara z ograniczeniami zaproponowanym w [H6] (patrz też §3.1) odegrały tzw. *dualne wielomiany Bernsteina z ograniczeniami*, które definiujemy w następujący sposób.

Niech  $\Pi_n^{(k,l)}$  ( $k+l \leq n$ ;  $n, k, l \in \mathbb{N}$ ) będzie przestrzenią wielomianów stopnia  $\leq n$  mających  $k$ -krotne miejsce zerowe w  $t = 0$  i  $l$ -krotne miejsce zerowe w  $t = 1$ . Zauważmy, że bazę takiej przestrzeni tworzą np. wielomiany Bernsteina  $B_k^n, B_{k+1}^n, \dots, B_{n-l}^n$ .

*Dualne wielomiany Bernsteina z ograniczeniami* stopnia  $n \in \mathbb{N}$  [H6]

$$D_k^{(n,k,l)}(x; \alpha, \beta), D_{k+1}^{(n,k,l)}(x; \alpha, \beta), \dots, D_{n-l}^{(n,k,l)}(x; \alpha, \beta) \in \Pi_n^{(k,l)} \quad (k+l \leq n) \quad (2.13)$$

spełniają warunki postaci

$$\left\langle D_j^{(n,k,l)}(\cdot; \alpha, \beta), B_i^n \right\rangle_J = \delta_{ij} \quad (k \leq i, j \leq n-l).$$

Jak już wspomniano, w wypadku ograniczeń typu  $k = l$  i dla  $\alpha = \beta = 0$  wielomiany takie wprowadził i badał Jüttler w [26].

W [H6] udowodniono, że dualne wielomiany Bernsteina z ograniczeniami  $D_i^{(n,k,l)}(x; \alpha, \beta)$  mogą być wyrażone przez dualne wielomiany Bernsteina stopnia  $n-k-l$  z parametrami  $\alpha+2l$  i  $\beta+2k$  (por. (2.10)). Mianowicie, zachodzi poniższe twierdzenie.

**Twierdzenie 2.5** ([H6]). *Dla  $i = k, k+1, \dots, n-l$  zachodzi relacja postaci*

$$D_i^{(n,k,l)}(x; \alpha, \beta) = \binom{n-k-l}{i-k} \binom{n}{i}^{-1} x^k (1-x)^l D_{i-k}^{n-k-l}(x; \alpha+2l, \beta+2k) \quad (k \leq i \leq n-l). \quad (2.14)$$

Tym samym, wszystkie własności dualnych wielomianów Bernsteina bez ograniczeń można łatwo przenieść na dualne wielomiany Bernsteina z ograniczeniami.

Twierdzenie 2.5 wykorzystano w pracy [4] do podania jawnej (choć dość skomplikowanej) postaci wielomianów dualnych do pewnych uogólnionych baz typu Balla.

Problem znajdowania postaci Béziara wielomianów  $D_i^{(n,k,l)}$  rozważano w [H4] (patrz paragraf 2.2). Natomiast o zastosowaniach dualnych wielomianów Bernsteina z ograniczeniami więcej piszemy w paragrafie 3.1, gdzie przedstawiamy efektywny algorytm obniżania stopnia krzywych Béziara opracowany w [H6].

### 2.1.3. Dualne dyskretne wielomiany Bernsteina

Niech  $\beta_i^n(x; N)$  ( $i = 0, 1, \dots, n \leq N$ ) będzie  $i$ -tym dyskretnym wielomianem Bernsteina stopnia  $n \in \mathbb{N}$  [48], [65], [66] (zob. wzór (1.5)). Niech  $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$  oznacza iloczyn skalarny, względem którego ortogonalne są wielomiany Hahna  $Q_k(t; \alpha, \beta, N)$ , tzn.

$$\langle f, g \rangle_H := \sum_{x=0}^N \binom{\alpha+x}{x} \binom{\beta+N-x}{N-x} f(x)g(x) \quad (\alpha, \beta > -1; N \in \mathbb{N}).$$

Patrz np. [H6, §2].

Dualne dyskretne wielomiany Bernsteina stopnia  $n \in \mathbb{N}$  [H6]

$$d_0^n(x; \alpha, \beta, N), d_1^n(x; \alpha, \beta, N), \dots, d_n^n(x; \alpha, \beta, N) \in \Pi_n \quad (n \leq N) \quad (2.15)$$

definiujemy w następujący sposób:

$$\langle d_i^n(\cdot; \alpha, \beta, N), \beta_i^n(\cdot; N) \rangle_H = \delta_{ij} \quad (i, j = 0, 1, \dots, n).$$

Wykorzystując podejście z [H2], w pracy [H6, twierdzenie A.3] udowodniono, że wielomiany dualne  $d_i^n(x; \alpha, \beta, N)$  są następującą kombinacją liniową wielomianów Hahna:

$$d_i^n(x; \alpha, \beta, N) = N! \sum_{k=0}^n \binom{N}{k} \frac{(2k + \sigma)(\alpha + 1)_k}{(\beta + 1)_k (k + \sigma)_{N+1}} Q_k(i; \alpha, \beta, n) \cdot Q_k(x; \alpha, \beta, N) \quad (0 \leq i \leq n), \quad (2.16)$$

gdzie  $\sigma := \alpha + \beta + 1$ , jak również, że dla  $j = 0, 1, \dots, n$

$$Q_j(x; \alpha, \beta, n) = \frac{(\sigma + j + 1)_N (-n)_j}{(\sigma + j + 1)_n (-N)_j N!} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (\alpha + 1)_i (\beta + 1)_{n-i} Q_j(i; \alpha, \beta, n) \cdot d_i^n(x; \alpha, \beta, N).$$

Zauważmy, że w wypadku obu podanych rozwinięć ich współczynniki wyrażają się przez wielomiany Hahna.

W [H6, twierdzenie A.3] uzyskano wynik analogiczny do przedstawionego w twierdzeniu 2.3 (patrz §2.1.1), mianowicie:

$$d_i^n(x; \alpha, \beta, N) = A_{n,i} \sum_{k=0}^i \frac{(-i)_k (-n - \sigma - N)_k}{(-n - \beta)_k (1 - N)_k} Q_{n-k}(N - x; \beta, \alpha + k + 1, N - k - 1), \quad (2.17)$$

gdzie  $0 \leq i \leq n$ , natomiast  $A_{n,i}$  jest znaną wielkością (por. [H6, wzór (A.12)]), co — biorąc pod uwagę, że  $d_i^n(x; \alpha, \beta, N) = d_{n-i}^n(N - x; \beta, \alpha, N)$  (patrz [H6, wniosek A.4]) — oznacza, że dualny dyskretny wielomian Bernsteina  $d_i^n$  ( $0 \leq i \leq n$ ) może być przedstawiony jako prosta kombinacja  $\min(i, n - i) + 1$  wielomianów Hahna z przesuniętymi parametrami i argumentem.

Kluczowymi dla sformułowania szybkiego i efektywnego numerycznego algorytmu obniżania stopnia krzywych Béziera z ograniczeniami, zaproponowanego w [H6], są jednak następujące własności dualnych dyskretnych wielomianów Bernsteina.

**Twierdzenie 2.6** ([H6]). *Dualne dyskretne wielomiany Bernsteina  $d_i^n(x) \equiv d_i^n(x; \alpha, \beta, N)$  spełniają równanie różnicowo-rekurencyjne postaci*

$$a_N(x) d_i^n(x + 1) + [c_n(i) - c_N(x)] d_i^n(x) + b_N(x) d_i^n(x - 1) = a_n(i) d_{i+1}^n(x) + b_n(i) d_{i-1}^n(x),$$

gdzie  $0 \leq i \leq n \leq N$ ,  $d_{-1}^n(x) = d_{n+1}^n(x) := 0$  oraz

$$a_n(x) := (x - n)(x + \alpha + 1), \quad b_n(x) := x(x - \beta - n - 1), \quad c_n(x) := a_n(x) + b_n(x).$$

**Twierdzenie 2.7** ([H6]). *Pomiędzy dualnymi wielomianami Bernsteina (2.10) stopnia  $n$  i  $m$  zachodzi zależność*

$$D_i^m(x; \alpha, \beta) = \sum_{j=0}^n \phi_{ij} D_j^n(x; \alpha, \beta) \quad (n > m), \quad (2.18)$$

gdzie  $i = 0, 1, \dots, m$ , a współczynniki  $\phi_{ij}$  wyrażają się wzorem

$$\phi_{ij} \equiv \phi_{ij}^{(n,m)}(\alpha, \beta) := \frac{(\alpha + 1)_{n-j} (\beta + 1)_j}{j! (n - j)!} d_i^m(j; \beta, \alpha, n).$$

Pierwsze z twierdzeń pokazuje, że dualne dyskretne wielomiany Bernsteina  $d_i^n$  spełniają równanie różnicowo-rekurencyjne drugiego rzędu o prostych wielomianowych współczynnikach. Dowód tej zależności wykorzystuje istotnie postać (2.16) wielomianu dualnego  $d_i^n$  oraz równanie różnicowe spełniane przez wielomiany Hahna (patrz np. [31, §1.5]).

Twierdzenie 2.7 jest natomiast konsekwencją wzorów (2.11), (2.12) i (2.16). Dotyczy ono problemu tzw. *podnoszenia stopnia* dualnych wielomianów Bernsteina (patrz §2.1.2), tj. przedstawienia dualnych wielomianów Bernsteina stopnia  $m$  jako kombinacji liniowej wielomianów dualnych  $D_i^n$  stopnia wyższego ( $n > m$ ). Co jednak najważniejsze, stwierdza ono, że współczynniki  $\phi_{ij}$  występujące we wzorze (2.18) można zidentyfikować jako dualne dyskretne wielomiany Bernsteina. Tym samym otrzymujemy interesującą relację łączącą dwie rodziny wielomianów dualnych, tzn. dualne wielomiany Bernsteina (2.10) i dualne dyskretne wielomiany Bernsteina (2.15).

Jak już wspomnieliśmy, wyniki te są podstawą metody obniżania stopnia krzywych Béziera opracowanej w [H6]. O ich roli i zastosowaniach dokładniej piszemy w paragrafie 3.1.

## 2.2. Postać Béziera dualnych wielomianów Bernsteina

Dualne wielomiany Bernsteina (patrz §2.1.2) znajdują wiele zastosowań, w szczególności w pewnych problemach teorii aproksymacji czy grafiki komputerowej. Związane są one m.in. z następującymi problemami: *znajdowania przecięć krzywych parametrycznych* [5], [43], [67], *obniżanie stopnia krzywych i powierzchni Béziera* [39], [H5], [H6] (patrz też §3.1 i §3.2) czy *aproksymacją wielomianową wymiernych krzywych Béziera* [41]. Biorąc pod uwagę wymienione zastosowania, często potrzebna jest znajomość tzw. *postaci Béziera* dualnych wielomianów Bernsteina z ograniczeniami (patrz (2.13)). Chodzi tu o wyznaczanie współczynników  $C_{ij}(n, k, l, \alpha, \beta)$ , dla których

$$D_i^{(n,k,l)}(x; \alpha, \beta) = \sum_{j=k}^{n-l} C_{ij}(n, k, l, \alpha, \beta) B_j^n(x) \quad (k \leq i \leq n-l). \quad (2.19)$$

W roku 1998, Jüttler [26] podał jawny wzór dla *współczynników Béziera* dualnych wielomianów Bernsteina bez ograniczeń dla  $\alpha = \beta = 0$  (patrz (2.7)) oraz zaproponował dość skomplikowany i drogi algorytm rekurencyjnego wyznaczania postaci Béziera dualnych wielomianów Bernsteina z ograniczeniami typu  $k = l$  dla  $\alpha = \beta = 0$ . Następnie, wyniki Jüttlera zostały uogólnione przez Rababaha i Al-Natura w [57] ( $k = l = 0, \alpha, \beta > -1$ ), gdzie wykazano, że

$$D_i^n(x; \alpha, \beta) = \sum_{j=0}^n C_{ij}(n, \alpha, \beta) B_j^n(x) \quad (0 \leq i \leq n) \quad (2.20)$$

dla

$$C_{ij}(n, \alpha, \beta) = \frac{(-1)^{i+j}}{\binom{n}{i} \binom{n}{j}} \sum_{h=0}^{\min(i,j)} \frac{v_{ih} v_{jh} (2h + \beta + 1)}{\binom{n+\alpha-h}{n-h}} \binom{n + \alpha + \beta + h + 1}{n + \beta + h + 1}, \quad (2.21)$$

przy czym

$$v_{mh} := \binom{n + \beta + h + 1}{n - m} \binom{n + \alpha - h}{n + \alpha - m}.$$

Wypadek  $k = l, \alpha, \beta > -1$  był rozważany przez Rababaha i Al-Natura w [58].

Zarówno metoda Jüttlera, jak i wyniki Rababaha i Al-Natura pozwalają obliczyć wszystkie współczynniki postaci Béziera dualnych wielomianów Bernsteina bez ograniczeń w czasie  $O(n^3)$ . Jeśli chodzi zaś o wypadek z ograniczeniami typu  $k = l$ , to zaproponowane przez nich algorytmy nie mogą znaleźć praktycznego zastosowania ze względu na zbyt dużą złożoność obliczeniową.

W [38] podano efektywny algorytm rekurencyjnego obliczania współczynników  $C_{ij}(n, k, l, \alpha, \beta)$  dla wszystkich  $k \leq i, j \leq n-l$  działający w czasie  $O(n^2)$ . Zauważmy, że złożoność zaproponowanej tam metody jest więc proporcjonalna do liczby szukanych współczynników.

Podstawą wspomnianego algorytmu są pewne zależności zachodzące pomiędzy dualnymi wielomianami Bernsteina a rodzinami ortogonalnymi przesuniętych wielomianów Jacobiego i wielomianów Hahna, które prowadzą do następującego wyniku.

**Twierdzenie 2.8** ([38]). *Współczynniki  $C_{ij}^* \equiv C_{ij}(n, k, l, \alpha, \beta)$  (patrz (2.19)) spełniają związek rekurencyjny postaci*

$$C_{i+1,j}^* = \frac{1}{A^*(i)} \left\{ (i-j)(2i+2j-2n-\alpha+\beta)C_{ij}^* + B^*(j)C_{i,j-1}^* + A^*(j)C_{i,j+1}^* - B^*(i)C_{i-1,j}^* \right\},$$

gdzie  $k \leq i \leq n-l-1$ ,  $k \leq j \leq n-l$ , a

$$\begin{aligned} A^*(u) &:= (u-n)(u-k+1)(u+k+\beta+1)/(u+1), \\ B^*(u) &:= u(u-n-l-\alpha-1)(u-n+l-1)/(u-n-1). \end{aligned}$$

Obserwacja ta odegrała ważną rolę w algorytmie aproksymacji wymiernych krzywych Béziera wielomianowymi krzywymi Béziera, opracowanym w pracy [41].

W artykule [H4], będącym kontynuacją badań zapoczątkowanych w pracy [38], autor rozważał natomiast zadanie obliczania współczynników

$$C_{ik}(n, k, l, \alpha, \beta), C_{i,k+1}(n, k, l, \alpha, \beta), \dots, C_{i,n-l}(n, k, l, \alpha, \beta) \quad (2.22)$$

dla ustalonego  $k \leq i \leq n-l$ .

Z zależność (2.14) wynika, że wystarczy skupić się na sposobie wyznaczania postaci Béziera dualnych wielomianów Bernsteina bez ograniczeń.

Stosując wzór (2.21) i relację (2.14), współczynniki (2.22) można obliczyć w czasie  $O(n^2)$ . Taką samą złożoność ma metoda wykorzystująca twierdzenie 2.8, bo wymaga ona znajomości wszystkich współczynników  $C_{pq}(n, k, l, \alpha, \beta)$  dla  $p < i$  oraz  $k \leq q \leq n-l$ .

Głównym wynikiem pracy [H4] było udowodnienie, że przy ustalonym  $0 \leq i \leq n$  współczynniki  $C_{ij}(n, \alpha, \beta)$  (zob. (2.20)) dla  $j = 0, 1, \dots, n$  mogą być wyznaczone w czasie liniowym. We wspomnianej pracy pokazano bowiem, że wielkości te spełniają proste *jednowymiarowe* związki rekurencyjne ze względu na zmienną  $j$ , co — biorąc pod uwagę wzór (2.21) i twierdzenie 2.8 — wydało się autorowi dość zaskakujące. Mianowicie, prawdziwe jest następujące twierdzenie.

**Twierdzenie 2.9** ([H4]). *Dla  $0 \leq i \leq n$ , współczynniki  $C_{ij} \equiv C_{ij}(n, \alpha, \beta)$  spełniają niejednorodny związek rekurencyjny pierwszego rzędu postaci*

$$(n-j)(i+j+\beta+2)C_{i,j+1} - (j+1)(2n-i-j+\alpha+1)C_{ij} = G_{ij} \quad (0 \leq j \leq n-1),$$

gdzie  $G_{ij} \equiv G_{ij}(n, \alpha, \beta)$  jest znaną funkcją (zob. [H4, wzór (2.2)]).

Punktem wyjścia w dowodzie przywołanego twierdzenia był wzór (2.21) otrzymany przez Rababaha i Al-Natura, do którego zastosowano algorytm Zeilbergera [52, §6]. Bezpośrednią konsekwencją tego wyniku było kolejne twierdzenie.

**Twierdzenie 2.10** ([H4]). *Dla współczynników  $C_{ij} \equiv C_{ij}(n, \alpha, \beta)$  zachodzi następujący jednorodny związek rekurencyjny drugiego rzędu:*

$$A(j)C_{i,j-1} + B(j)C_{ij} + D(j)C_{i,j+1} = 0 \quad (j = 0, 1, \dots, n-1),$$

gdzie  $0 \leq i \leq n$ , natomiast

$$\begin{cases} A(j) := j(j-n-\alpha-1)(2n-i-j+\alpha+2), \\ B(j) := (n-j+1)(n-j+\alpha+1)(i+j+\beta+1) - \\ \quad \quad \quad (j+1)(j+\beta+1)(2n-i-j+\alpha+1), \\ D(j) := (n-j)(j+\beta+1)(i+j+\beta+2). \end{cases}$$

Z twierdzeń 2.9 i 2.10 wynika, że dla ustalonego  $0 \leq i \leq n$  współczynniki

$$C_{i0}(n, \alpha, \beta), C_{i1}(n, \alpha, \beta), \dots, C_{in}(n, \alpha, \beta)$$

— a tym samym współczynniki (2.22) (por. twierdzenie 2.14) — mogą być obliczone w czasie liniowym  $O(n)$ , tj. o rząd szybciej niż przy stosowaniu metod z [38] czy [57].

Badania, których konsekwencją jest publikacja [H4], były prowadzone w ramach projektu badawczego *Dualne funkcje B-sklejane: konstrukcja i zastosowania* (numer: OPUS 2011/01/B/ST1/01221; kierownik: dr P. Woźny), finansowanego przez Narodowe Centrum Nauki.

### 2.3. Dualne wielomiany Bernsteina dwu zmiennych

W tej części autoreferatu opisujemy rodziny dualnych wielomianów Bernsteina dwu zmiennych wprowadzone w pracach [H1] i [H5].

#### 2.3.1. Dualne trójkątne wielomiany Bernsteina

Niech  $\langle \cdot, \cdot \rangle_T$  oznacza iloczyn skalarny, względem którego ortogonalne są *trójkątne wielomiany Jacobiego*  $P_{m,k}^{(\alpha,\beta,\gamma)}(x,y)$  ( $n \in \mathbb{N}$ ;  $0 \leq k \leq n$ ) [32] (zobacz też [H1, wzór (1.6)]), tj.

$$\langle f, g \rangle_T := \iint_T f(x, y)g(x, y)w_T^{(\alpha,\beta,\gamma)}(x, y) dx dy,$$

gdzie  $\alpha, \beta, \gamma > -\frac{1}{2}$ ,  $T$  jest obszarem trójkątnym postaci

$$T := \{(x, y) : x, y \geq 0, 1 - x - y \geq 0\}, \quad (2.23)$$

natomiast

$$w_T^{(\alpha,\beta,\gamma)}(x, y) := \frac{\Gamma(\alpha + \beta + \gamma + \frac{3}{2})}{\Gamma(\alpha + \frac{1}{2})\Gamma(\beta + \frac{1}{2})\Gamma(\gamma + \frac{1}{2})} x^{\alpha-\frac{1}{2}} y^{\beta-\frac{1}{2}} (1 - x - y)^{\gamma-\frac{1}{2}} \quad (2.24)$$

jest funkcją wagową.

*Dualne trójkątne wielomiany Bernsteina* stopnia  $n \in \mathbb{N}$  [H1]

$$D_{i,j}^n(x, y; \alpha, \beta, \gamma) \quad (i = 0, 1, \dots, n; j = 0, 1, \dots, n - i)$$

są wielomianami dwu zmiennych stopnia  $\leq n$ , spełniającymi następujące warunki:

$$\langle B_{i,j}^n, D_{l,m}^n \rangle_T = \delta_{il}\delta_{jm} \quad (0 \leq i + j, l + m \leq n),$$

gdzie  $B_{i,j}^n$  oznaczają trójkątne wielomiany Bernsteina dwu zmiennych (1.10).

W [H1, twierdzenie 3.2], wykorzystując wzór (1.11), wykazano, że wielomiany  $D_{i,j}^n(x, y; \alpha, \beta, \gamma)$  mają następującą reprezentację w bazie trójkątnych wielomianów Jacobiego:

$$D_{i,j}^n(x, y; \alpha, \beta, \gamma) = \sum_{0 \leq k \leq m \leq n} J_{m,k} H_{m,k}(j, n - i - j, \alpha - \frac{1}{2}, \beta - \frac{1}{2}, \gamma - \frac{1}{2}, n) \cdot P_{m,k}^{(\alpha,\beta,\gamma)}(x, y),$$

gdzie  $0 \leq i + j \leq n$ ,  $J_{m,k}$  są znanymi wielkościami (zob. [H1, wzór (3.7)]), a  $H_{n,k}(s, t; a, b, c, N)$  oznaczają wielomiany Hahna dwu zmiennych [27], [63], [72] (patrz też [H1, wzór (1.13)]).

W [H1, twierdzenie 3.3], udało się znaleźć relację łączącą dualne trójkątne wielomiany Bernsteina z dualnymi wielomianami Bernsteina jednej zmiennej (por. (2.10)) oraz wielomianami Hahna i przesuniętymi wielomianami Jacobiego jednej zmiennej.

Podano tam także związek rekurencyjny zachodzący pomiędzy dualnymi trójkątnymi wielomianami Bernsteina stopnia  $n$ ,  $n + 1$  i trójkątnymi wielomianami Jacobiego stopnia  $n + 1$ . Patrz [H1, twierdzenie 3.1].

Natomiast, w [H1, twierdzenie A.1] rozważano problem koneksji pomiędzy trójkątnymi wielomianami Jacobiego z różnymi parametrami. Udowodniono tam, że w tym wypadku współczynniki koneksji są iloczynem funkcji hipergeometrycznych  ${}_4F_3(1)$  i  ${}_3F_2(1)$ .

Kluczową rolę w metodzie obniżania stopnia trójkątnych płatów Béziara, zaproponowanej w [H5] (patrz też §3.2), odegrały tzw. *dualne trójkątne wielomiany Bernsteina z ograniczeniami*, których definicję i ważną własność podajemy poniżej.

Niech będzie  $m \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbf{c} := (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{N}^3$ , gdzie  $|\mathbf{c}| := c_1 + c_2 + c_3 < m$ . Niech  $\Pi_m^{\mathbf{c},2}$  oznacza przestrzeń wielomianów dwu zmiennych stopnia  $\leq m$  postaci

$$P(x, y) = x^{c_1} y^{c_2} (1 - x - y)^{c_3} Q(x, y),$$

gdzie  $Q$  jest wielomianem dwu zmiennych stopnia  $\leq m - |\mathbf{c}|$ . Wprowadzamy zbiór

$$\Omega_m^{\mathbf{c}} := \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 : i \geq c_1, j \geq c_2, i + j \leq m - c_3\}.$$

*Dualne trójkątne wielomiany Bernsteina z ograniczeniami stopnia  $m \in \mathbb{N}$  [H5]*

$$D_{i,j}^{(m,\mathbf{c})}(x, y; \alpha, \beta, \gamma) \in \Pi_m^{\mathbf{c},2}, \quad (i, j) \in \Omega_m^{\mathbf{c}}, \quad (2.25)$$

gdzie  $\alpha, \beta, \gamma > -\frac{1}{2}$ , definiujemy tak, aby

$$\left\langle D_{i,j}^{(m,\mathbf{c})}(\cdot, \cdot; \alpha, \beta, \gamma), B_{p,q}^m \right\rangle_T = \delta_{ip} \delta_{jq}, \quad (i, j), (p, q) \in \Omega_m^{\mathbf{c}}.$$

Dualne trójkątne wielomiany Bernsteina z ograniczeniami stopnia  $m$  wyrażają się przez dualne trójkątne wielomiany Bernsteina bez ograniczeń stopnia  $m - |\mathbf{c}|$  z przesuniętymi parametrami w następujący sposób.

**Twierdzenie 2.11** ([H5]). *Dla  $(i, j) \in \Omega_m^{\mathbf{c}}$  prawdziwa jest równość*

$$D_{i,j}^{(m,\mathbf{c})}(x, y; \alpha, \beta, \gamma) = V_{i,j} \cdot x^{c_1} y^{c_2} (1 - x - y)^{c_3} D_{i-c_1, j-c_2}^{m-|\mathbf{c}|}(x, y; \alpha + 2c_1, \beta + 2c_2, \gamma + 2c_3),$$

gdzie  $V_{i,j}$  jest znaną wielkością (patrz [H5, wzór (A.24)]).

### 2.3.2. Dualne dyskretne wielomiany Bernsteina dwu zmiennych

Niech  $\beta_{k,l}^n(x, y; N)$  ( $0 \leq k + l \leq n \leq N$ ;  $n, k, l, N \in \mathbb{N}$ ) będą dyskretnymi wielomianami Bernsteina dwu zmiennych stopnia  $n \in \mathbb{N}$  [48], [65],

$$\beta_{k,l}^n(x, y, N) := \frac{1}{(-N)_n} \binom{n}{k, l} (-x)_k (-y)_l (s + t - N)_{n-k-l},$$

a  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H_2}$  iloczynem skalarnym, względem którego ortogonalne są wielomiany Hahna dwu zmiennych  $H_{i,j}(s, t; \alpha, \beta, \gamma, N)$ ,

$$\langle f, g \rangle_{H_2} := \sum_{x=0}^N \sum_{y=0}^{N-x} \frac{(\beta + 1)_x (\gamma + 1)_y (-N)_{x+y}}{x! y! (-\alpha - N)_{x+y}} f(x, y) g(x, y) \quad (\alpha, \beta, \gamma > -1; N \in \mathbb{N})$$

(zobacz [27], [63], [72] oraz [H5, wzór (A.6)]).

*Dualne dyskretne wielomiany Bernsteina dwu zmiennych stopnia  $n \in \mathbb{N}$ , wprowadzone w [H5],*

$$d_{k,l}^n(x, y; \alpha, \beta, \gamma, N) \quad (0 \leq k + l \leq n \leq N) \quad (2.26)$$

definiujemy jako wielomiany dwu zmiennych stopnia  $\leq n$  spełniające następujące warunki:

$$\langle \beta_{i,j}^n(\cdot, \cdot; N), d_{k,l}^n(\cdot, \cdot; \alpha, \beta, \gamma, N) \rangle_{H_2} = \delta_{ik} \delta_{jl} \quad (0 \leq i + j, k + l \leq n).$$

Wielomiany te zostały istotnie wykorzystane w nowym algorytmie szybkiego obniżania stopnia trójkątnych płatów Béziara z ograniczeniami przedstawionym we wspomnianej pracy (patrz też paragraf 3.2). Główną rolę w metodzie tej odegrały poniższe własności wielomianów  $d_{k,l}^n(x, y; \alpha, \beta, \gamma, N)$ .

**Twierdzenie 2.12** ([H5]). *Dualne dyskretne wielomiany Bernsteina dwu zmiennych mają następujące przedstawienie w bazie wielomianów Hahna dwu zmiennych:*

$$d_{k,l}^n(x, y; \alpha, \beta, \gamma, N) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{\min(i, k+l)} K_{i,j} H_{i,j}(k, l; \alpha, \beta, \gamma, n) \cdot H_{i,j}(x, y; \alpha, \beta, \gamma, N) \quad (0 \leq k + l \leq n), \quad (2.27)$$

gdzie  $K_{i,j}$  są znanymi wielkościami (por. [H5, wzór (A.28)]).

Zauważmy, że i w tym wypadku współczynniki podanej reprezentacji wyrażają się przez wielomiany ortogonalne — tym razem przez wielomiany Hahna dwu zmiennych.

Wykorzystując postać (2.27) dualnych dyskretnych wielomianów Bernsteina dwu zmiennych i równanie różnicowe zachodzące dla wielomianów Hahna dwu zmiennych (patrz [27], [63]) można udowodnić poniższe twierdzenie.

**Twierdzenie 2.13** ([H5]). *Wielomiany dualne  $d_{k,l}^n(x, y) \equiv d_{k,l}^n(x, y; \alpha, \beta, \gamma, N)$  spełniają następujące równanie różnicowo-rekurencyjne:*

$$\sum_{\substack{i,j=-1,0,1 \\ |i+j| \leq 1}} \omega_{ij}(x, y) d_{k,l}^n(x+i, y+j) - \sum_{\substack{i,j=-1,0,1 \\ |i+j| \leq 1}} \omega_{ij}(k, l) d_{k+i, l+j}^n(x, y) = 0, \quad (2.28)$$

gdzie współczynniki  $\omega_{ij}(x, y) \equiv \omega_{ij}(x, y; \alpha, \beta, \gamma, N)$  są znanymi wielomianami zmiennych  $x$  i  $y$  stopnia  $\leq 2$  (patrz [H5, wzory (A.13)]), a  $d_{k,l}^n(x, y) \equiv 0$  dla  $k < 0$  lub  $l < 0$  lub  $k + l > n$ .

W [H5, wniosek A.7] podano też związek łączący wielomiany dualne dwu zmiennych (2.26) z dualnymi dyskretnymi wielomianami Bernsteina jednej zmiennej (2.15). Dla potrzeb opracowania wspomnianego już algorytmu obniżania stopnia trójkątnych płatów Béziera badano tam też własności wielomianów dualnych postaci  $d_{k, n-k}^n$ . Patrz [H5, wniosek A.8 i lemat A.10].

### 3. Zastosowania

Wskażemy teraz pewne zastosowania baz Bernsteina i dualnych baz Bernsteina w grafice komputerowej oraz teorii kwantowych wielomianów ortogonalnych.

#### 3.1. Obniżanie stopnia krzywych Béziera z ograniczeniami

Zadanie obniżania stopnia krzywych Béziera z ograniczeniami, rozpatrywane w [H6], można opisać następująco. Niech dana będzie krzywa Béziera  $P_n$  stopnia  $n$  o punktach kontrolnych  $p_i \in \mathbb{R}^d$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ),

$$P_n(t) := \sum_{i=0}^n p_i B_i^n(t) \quad (0 \leq t \leq 1).$$

Znaleźć krzywą Béziera  $R_m$  stopnia  $m$  ( $m < n$ ),

$$R_m(t) := \sum_{i=0}^m r_i B_i^m(t) \quad (r_i \in \mathbb{R}^d; 0 \leq t \leq 1),$$

minimalizującą wartość całki

$$\int_0^1 (1-t)^{\alpha} t^{\beta} \|P_n(t) - R_m(t)\|^2 dt \quad (\alpha, \beta > -1), \quad (3.1)$$

gdzie  $\|\cdot\|$  oznacza normę euklidesową, oraz spełniającą warunki postaci

$$P_n^{(i)}(0) = R_n^{(i)}(0) \quad (0 \leq i < k), \quad P_n^{(j)}(1) = R_n^{(j)}(0) \quad (0 \leq j < l), \quad (3.2)$$

gdzie z kolei  $k + l \leq m$ .

Problem obniżania stopnia krzywych Béziera pojawia się w naturalny sposób w zastosowaniach grafiki komputerowej. Ma on duże znaczenie m.in. dla kompresji danych czy przy wymianie informacji pomiędzy różnego rodzaju systemami graficznymi. Ostatnio tematyka ta jest bardzo żywa o czym świadczyć może mnogość publikacji dotyczących zadania obniżania stopnia krzywych Béziera dla różnych funkcji błędu i przy różnych ograniczeniach. Patrz np. [1, 2, 6, 9, 10, 15, 17, 33, 46, 47, 59–61, 70, 71].

Zauważmy, że złożoność wcześniejszych metod rozwiązywania postawionego wyżej zadania wynosi  $O(n^3)$ . Powodem tego jest fakt, że większość autorów stosuje podejście standardowe polegające na zamianie postaci Béziera krzywej oryginalnej  $P_n$  na jej postać *Jacobiego* (tj. na kombinację liniową przesuniętych wielomianów Jacobiego) — co kosztuje właśnie  $O(n^3)$  operacji arytmetycznych — następnie dokonuje obniżenia stopnia, a dopiero w ostatnim kroku powraca do postaci Béziera, uzyskując w ten sposób punkty kontrolne krzywej  $R_m$ .

Opiszemy teraz metodą obniżania stopnia zaproponowaną w [H6], która istotnie wykorzystuje własności dualnych wielomianów Bernsteina z ograniczeniami (patrz §2.1.2) i ich związki z dualnymi dyskretnymi wielomianami Bernsteina (patrz §2.1.3). Dzięki zastosowaniu baz dualnych udało się sformułować algorytm, którego złożoność wynosi  $O(mn)$ , gdzie  $n$  jest stopniem krzywej oryginalnej, a  $m$  — stopniem krzywej  $R_m$ .

Punkty kontrolne  $r_0, r_1, \dots, r_{k-1}$  oraz  $r_m, r_{m-1}, \dots, r_{m-l+1}$  są zdeterminowane przez warunki (3.2). Można wykazać, że pozostałe punkty kontrolne są postaci

$$r_i = \sum_{j=k}^{n-l} w_j \left\langle B_j^n, D_i^{(m,k,l)} \right\rangle_J \quad (k \leq i \leq m-l),$$

gdzie  $D_i^{(m,k,l)}$  są dualnymi wielomianami Bernsteina z ograniczeniami (patrz (2.13)), a  $w_j$  ( $k \leq j \leq n-l$ ) są znanymi oraz niezależnymi od  $i$  wielkościami. Patrz [H6, twierdzenie 4.1].

Zadanie obniżania stopnia zostało tym samym sprowadzone do wyznaczenia

$$\Phi_{ij} \equiv \Phi_{ij}^{(n,m,k,l)}(\alpha, \beta) := \left\langle B_j^n, D_i^{(m,k,l)} \right\rangle_J$$

dla  $k \leq i \leq m-l$ ,  $k \leq j \leq n-l$ .

Zauważmy, że wielkości  $\Phi_{ij}$  występują w następującym związku łączącym dualne wielomiany Bernsteina z ograniczeniami stopnia  $n$  i  $m$ :

$$D_i^{(m,k,l)}(x; \alpha, \beta) = \sum_{j=k}^{n-l} \Phi_{ij} D_j^{(n,k,l)}(x; \alpha, \beta) \quad (k \leq i \leq m-l; n > m).$$

Z twierdzenia 2.5 i twierdzenia 2.7 wynika, że

$$\Phi_{ij} = \binom{m-k-l}{i-k} \binom{n}{j} \binom{m}{i}^{-1} \frac{(\alpha + 2l + 1)_{n-l-j} (\beta + 2k + 1)_{j-k}}{(n-k-l)!} \Psi_{ij},$$

gdzie wielkości  $\Psi_{ij}$  wyrażają się przez dualne dyskretne wielomiany Bernsteina (2.15) postaci

$$\Psi_{ij} \equiv \Psi_{ij}^{(n,m,k,l)}(\alpha, \beta) := d_{i-k}^{m-k-l}(j-k; \beta + 2k, \alpha + 2l, n-k-l).$$

Patrz [H6, twierdzenie 3.2]. Trzeba zatem wyznaczyć  $(n-k-l+1)(m-k-l+1)$  elementów następującej tablicy  $\Psi$ :

$$\begin{array}{cccc} \Psi_{kk} & \Psi_{k,k+1} & \cdots & \Psi_{k,n-l} \\ \Psi_{k+1,k} & \Psi_{k+1,k+1} & \cdots & \Psi_{k+1,n-l} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \Psi_{m-l,k} & \Psi_{m-l,k+1} & \cdots & \Psi_{m-l,n-l} \end{array}$$



Algorytm obliczania wszystkich elementów  $\Psi_{ij}$  w czasie  $O(mn)$ , a więc proporcjonalnym do ich liczby, podano w [H6, §5]. Przebiega on w dwóch etapach. Najpierw w czasie  $O(n)$  wyznaczany jest rekurencyjnie pierwszy wiersz tablicy  $\Psi$ , a wykorzystuje się do tego m.in. wzór (2.17). Elementy kolejnych wierszy oblicza się w czasie  $O(mn)$  stosując następujące twierdzenie będące konsekwencją równania różnicowo-rekurencyjnego spełnianego przez dualne dyskretne wielomiany Bernsteina (por. twierdzenie 2.6).

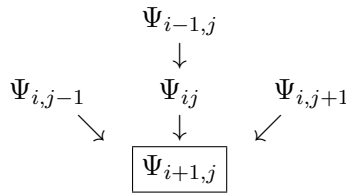
**Twierdzenie 3.1** ([H6]). *Wielkości  $\Psi_{ij}$  spełniają związek rekurencyjny postaci*

$$\Psi_{i+1,j} = \{A(n,j)\Psi_{i,j-1} + [C(m,i) - C(n,j)]\Psi_{ij} + B(n,j)\Psi_{i,j+1} - A(m,i)\Psi_{i-1,j}\}/B(m,i),$$

gdzie  $k \leq i \leq m-l-1$ ,  $k \leq j \leq n-l$ , natomiast

$$A(r,s) := (k-s)(r+l-s+\alpha+1), \quad B(r,s) := (s+l-r)(k+s+\beta+1), \quad C(r,s) := A(r,s) + B(r,s).$$

Twierdzenie to mówi, że element  $\Psi_{i+1,j}$  może być wyznaczony przy pomocy trzech sąsiednich elementów wiersza  $i$ -tego oraz jednego elementu wiersza  $(i-1)$ -szego, według poniższego schematu.



W [H6, §6] przedstawiono przykłady zastosowania opisanej metody, dotyczących m.in. doboru parametrów  $k, l$  oraz  $\alpha, \beta$ , a przeprowadzone eksperymenty pokazują, że jest ona stabilna numerycznie.

Według wiedzy autora jest to w tej chwili najszybsza metoda obniżania stopnia krzywych Béziera z ograniczeniami typu (3.2) minimalizująca błąd średniokwadratowy (3.1).

### 3.2. Obniżanie stopnia trójkątnych płatów Béziera z ograniczeniami

Przedstawimy teraz metodę obniżania stopnia trójkątnych płatów Béziera jaką zaproponowano w [H5].

Dla liczb naturalnych  $n > m$  oraz wektora  $\mathbf{c} := (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{N}^3$ , spełniającego warunek  $|\mathbf{c}| := c_1 + c_2 + c_3 < m$ , wprowadzamy następujące zbiory:

$$\Theta_n := \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 : i + j \leq n\}, \quad \Theta_m := \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 : i + j \leq m\},$$

$$\Omega_m^{\mathbf{c}} := \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 : i \geq c_1, j \geq c_2, i + j \leq m - c_3\}, \quad \Gamma_m^{\mathbf{c}} := \Theta_m \setminus \Omega_m^{\mathbf{c}}.$$

Niech  $P_n$  będzie trójkątnym płatem Béziera stopnia  $n$  o punktach kontrolnych  $a_{ij} \in \mathbb{R}^d$ ,

$$P_n(x, y) := \sum_{(i,j) \in \Theta_n} a_{ij} B_{i,j}^n(x, y), \quad (x, y) \in T,$$

gdzie  $B_{i,j}^n$  są trójkątnymi wielomianami Bernsteina dwu zmiennych (por. (1.10)), a  $T$  jest obszarem trójkątnym (2.23). Niech dane będą punkty

$$g_{ij} \in \mathbb{R}^d \quad \text{dla} \quad (i, j) \in \Gamma_m^{\mathbf{c}}.$$

Zadanie obniżania stopnia trójkątnych płatów Béziera z ograniczeniami, rozważane w [H5], polega na znalezieniu trójkątnej powierzchni Béziera  $Q_m$  mniejszego stopnia  $m$ ,

$$Q_m(x, y) := \sum_{(i,j) \in \Theta_m} e_{ij} B_{i,j}^m(x, y), \quad (x, y) \in T,$$

minimalizującej wartość całki

$$\iint_T w_T^{(\alpha, \beta, \gamma)}(x, y) \|P_n(x, y) - Q_m(x, y)\|^2 dx dy,$$

dla której punkty kontrolne o wskaźnikach  $(i, j) \in \Gamma_m^c$  są z góry ustalone, tj.

$$e_{ij} = g_{ij}, \quad (i, j) \in \Gamma_m^c, \quad (3.3)$$

gdzie  $w_T^{(\alpha, \beta, \gamma)}$  jest funkcją wagową zadaną wzorem (2.24), a  $\|\cdot\|$  oznacza odległość euklidesową.

Zadanie obniżania stopnia trójkątnych płatów Béziera ma podłoże praktyczne związane m.in. z kompresją danych i kompatybilnością różnego rodzaju systemów graficznych. Wydaje się jednak, że w takiej ogólności nie było ono wcześniej rozważane. Warto zwrócić uwagę na ograniczenia (3.3). Mogą być one wykorzystane np. do stworzenia lub utrzymania gładkiego połączenia pomiędzy kilkoma płatami trójkątnymi, których stopień obniżamy (por. [16, §18.7]).

Wcześniejsze wyniki dotyczące różnie stawianego i rozwiązywanego problemu obniżania stopnia trójkątnych płatów Béziera można znaleźć np. w [22–24], [30] (por. z [44]), [45, 55, 56].

Opiszemy teraz pokrótce najistotniejsze części metody obniżania stopnia opracowanej w [H5]. Mianowicie, wykazano tam, że dla  $(i, j) \in \Omega_m^c$  punkty kontrolne  $e_{ij}$  płata  $Q_m$ , dające minimalną wartość całki (3.3), wyrażają się wzorem

$$e_{ij} = \sum_{(p,q) \in \Theta_n} a_{pq}^* \Phi_{pq}^{ij}, \quad (i, j) \in \Omega_m^c,$$

gdzie

$$\Phi_{pq}^{ij} \equiv \Phi_{pq}^{ij}(n, m, \alpha, \beta, \gamma, \mathbf{c}) := \left\langle D_{i,j}^{(m,\mathbf{c})}, B_{p,q}^n \right\rangle_T,$$

$D_{i,j}^{(m,\mathbf{c})}$  są dualnymi trójkątnymi wielomianami Bernsteina z ograniczeniami (patrz §2.3.1, wzór (2.25)), natomiast  $a_{ij}^*$  są łatwymi do wyznaczenia wielkościami (patrz [H5, wzór (3.8)]).

Tak więc, zadanie sprowadza się do obliczenia  $\Phi_{pq}^{ij}$  dla  $(i, j) \in \Omega_m^c$  oraz  $(p, q) \in \Theta_n$ . Autorzy pokazali, że wielkości te można przedstawić za pomocą dualnych dyskretnych wielomianów Bernsteina dwu zmiennych (2.26) postaci

$$\Psi_{pq}^{ij} \equiv \Psi_{pq}^{ij}(n, m, \alpha, \beta, \gamma, \mathbf{c}) := d_{j_c, k_c}^{m-|c|}(q_c, r_c; \alpha + 2c_1 - \frac{1}{2}, \beta + 2c_2 - \frac{1}{2}, \gamma + 2c_3 - \frac{1}{2}, n - |c|), \quad (3.4)$$

gdzie  $j_c := j - c_2$ ,  $k_c := m - i - j + c_2$ ,  $q_c := q - c_2$ ,  $r_c := n - p - q - c_3$ . Patrz [H5, lemat 4.1].

Obserwacja ta jest kluczowa, bowiem implikuje ona następujący związek rekurencyjny dla wielkości  $\Psi_{pq}^{ij}$  (por. zależność (2.28), §2.3.2).

**Twierdzenie 3.2** ([H5]). *Dla  $(i, j) \in \Omega_m^c$  oraz  $p, q \geq 1$ ,  $p + q \leq n$ , wielkości (3.4) spełniają związek rekurencyjny postaci*

$$\sum_{\substack{h,l=-1,0,1 \\ |h+l| \leq 1}} \omega_{hl}(q_c, r_c) \Psi_{p-h-l, q+h}^{ij} - \sum_{\substack{h,l=-1,0,1 \\ |h+l| \leq 1}} \omega_{hl}(j_c, k_c) \Psi_{pq}^{i-h-l, j+h} = 0 \quad (3.5)$$

dla znanych współczynników  $\omega_{hl}$  (patrz [H5, wzór (4.3)]).

Wprowadzamy tablicę trójkątną  $\Psi_{\Delta} := [\Psi^{ij}]_{(i,j) \in \Omega_m^c}$  zawierającą bloki trójkątne  $\Psi^{ij} := [\Psi_{pq}^{ij}]_{(p,q) \in \Theta_n}$ . Zauważmy, że związek rekurencyjny (3.5) łączy ze sobą elementy siedmiu następujących bloków:

$$\begin{array}{ccc} \Psi^{i-1, j+1} & & \Psi^{i, j+1} \\ \Psi^{i-1, j} & \Psi^{i, j} & \Psi^{i+1, j} \\ & \Psi^{i, j-1} & \Psi^{i+1, j-1} \end{array}$$

Wykorzystując twierdzenie 3.2, jak również pewne inne własności dualnych dyskretnych wielomianów Bernsteina dwu zmiennych (zobacz [H5, §4, §A.4]), wszystkie elementy tablicy  $\Psi_{\Delta}$  mogą być obliczone w czasie  $O(m^2 n^2)$ , czyli proporcjonalnym do ich liczby. Patrz [H5, §4].

Tym samym złożoność opisanej tu metody znajdowania punktów kontrolnych  $e_{ij}$ ,  $(i, j) \in \Omega_m^c$ , płata  $Q_m$  wynosi właśnie  $O(m^2n^2)$ , gdzie  $n$  jest stopniem powierzchni wyjściowej, a  $m$  — stopniem powierzchni  $Q_m$ . Według wiedzy autora, jest to w tej chwili najogólniejsza i najszybsza metod obniżania stopnia trójkątnych powierzchni Béziera z ograniczeniami. Algorytm zaproponowany w [H5] został zrealizowany w języku obliczeń symbolicznych Maple<sup>TM</sup> i jest dostępny pod adresem <http://www.ii.uni.wroc.pl/~pwo/programs.html>.

Postępując podobnie i bazując na wynikach uzyskanych w [H6], Lewanowicz i Woźny opracowali także szybki algorytm obniżania stopnia tensorowych płatów Béziera z ograniczeniami. Patrz [38].

### 3.3. Duże kwantowe wielomiany Jacobiego dwu zmiennych

Jak wiadomo, wielomiany ortogonalne jednej zmiennej — zarówno te klasyczne, zmiennej dyskretnej, jak i ich kwantowe odpowiedniki — odgrywają ważną rolę w wielu działach matematyki, fizyki czy chemii oraz innych nauk związanych z teorią aproksymacji. Ze względu na łączące je zależności zostały one ujęte w hierarchię zwaną *tablicą Askeya*. Patrz np. [31].

W podobny schemat można ująć też wielomiany ortogonalne wielu zmiennych. W szczególności, możliwe jest stworzenie wielowymiarowego odpowiednika tzw. *kwantowej* części tablicy Askeya (inaczej: *tablicy  $q$ -Askeya*; patrz np. [31, §3]).

Konkretnymi rodzinami kwantowych wielomianów ortogonalnych wielu zmiennych zajmowali się m.in. Dunkl [13], który wprowadził *kwantowe wielomiany Hahna dwu zmiennych* i *małe kwantowe wielomiany Jacobiego dwu zmiennych* oraz Gasper i Rahman [18], którzy badali *kwantowe wielomiany Racah* wielu zmiennych i ich warianty lub wypadki graniczne, tj. *kwantowe wielomiany Hahna*, *Krawtchouka*, *Meixnera* i *Charliera* wielu zmiennych. Ogólną teorię *dyskretnych* wielomianów ortogonalnych wielu zmiennych można znaleźć w [82].

W tej części autoreferatu streścimy wyniki uzyskane w artykule [H3], gdzie wprowadzono i zbadano nową, czteroparametrową rodzinę wielomianów ortogonalnych, tzw. *duże kwantowe wielomiany Jacobiego dwu zmiennych*, uzupełniając tym samym dwuwymiarowy odpowiednik schematu  $q$ -Askeya. Dodajmy już teraz, że przedstawione niżej wyniki łączą się w naturalny sposób z uogólnionymi wielomianami Bernsteina dwu zmiennych [40], na co chcemy zwrócić tu szczególną uwagę.

Niech  $P_m(t; A, B, C; q)$  oznacza  $m$ -ty duży kwantowy wielomian Jacobiego jednej zmiennej  $t$  (patrz np. [31, §3] oraz [H3, str. 1554]). *Duże kwantowe wielomiany Jacobiego dwu zmiennych* definiujemy w następujący sposób:

$$P_{n,k}(x, y; a, b, c, d; q) := P_{n-k}(y; a, bcq^{2k+1}, dq^k; q) y^k (dq/y; q)_k P_k(x/y; c, b, d/y; q),$$

gdzie  $n \in \mathbb{N}$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ ,  $q \in (0, 1)$ , parametry  $a, b, c, d$  spełniają warunki  $0 < aq, bq, cq < 1$ ,  $d < 0$ , natomiast  $(c; q)_k$  jest symbolem  $q$ -Pochhammera (1.2).

W wypadku  $d = 0$  wielomiany  $P_{n,k}(x, y; a, b, c, 0; q)$  redukują się do wielomianów, które są blisko związane z małymi kwantowymi wielomianami Jacobiego dwu zmiennych wprowadzonymi przez Dunkla w [13], a przy przejściu granicznym dla  $q \rightarrow 1$  otrzymujemy trójkątne wielomiany Jacobiego  $P_{m,k}^{(\alpha, \beta, \gamma)}(x, y)$  [32], [14]. Patrz [H3, §2, str. 1555].

Wykorzystując własności dużych kwantowych wielomianów Jacobiego jednej zmiennej, w [H3, twierdzenie 2.1] pokazano, że rodzina wielomianów  $P_{n,k}$  ( $0 \leq k \leq n$ ;  $n \in \mathbb{N}$ ) jest ortogonalna względem nieujemnej funkcji wagowej

$$W(x, y; a, b, c, d; q) := \frac{(dq/y, x/(cy), x/d, y/a, y/d; q)_\infty}{y(d/(cy), cqy/d, x/y, bx/d, y; q)_\infty}$$

i iloczynu skalarnego postaci

$$\langle f, g \rangle_{bqJ_2} := \int_{dq}^{aq} \int_{dq}^{cgy} W(x, y; a, b, c, d; q) f(x, y) g(x, y) d_q x d_q y$$

(por. (2.3), (2.4)). Podano tam także związki rekurencyjne dla dużych kwantowych wielomianów Jacobiego dwu zmiennych. Dokładniej, prawdziwe jest następujące twierdzenie.

**Twierdzenie 3.3** ([H3]). *Niech będzie*

$$\mathbb{P}_n := [P_{n,0}, P_{n,1}, \dots, P_{n,n}]^T \quad (n = 0, 1, \dots), \quad (3.6)$$

gdzie  $P_{n,k} \equiv P_{n,k}(x, y; a, b, c, d; q)$ . Duże kwantowe wielomiany Jacobiego dwu zmiennych spełniają następujące związki rekurencyjne:

$$z\mathbb{P}_n = A_{n,z}\mathbb{P}_{n-1} + B_{n,z}\mathbb{P}_n + C_{n,z}\mathbb{P}_{n+1} \quad (z = x, y),$$

gdzie  $P_{-1} := 0$ , natomiast  $A_{n,z}$ ,  $B_{n,z}$  i  $C_{n,z}$  są macierzami o rozmiarach, odpowiednio,  $(n+1) \times (n+2)$ ,  $(n+1) \times (n+1)$  i  $(n+1) \times n$ . Macierze  $A_{n,y}$ ,  $B_{n,y}$  i  $C_{n,y}$  są przekątniowe, a macierze  $A_{n,x}$ ,  $B_{n,x}$ ,  $C_{n,x}$  — trójprzekątniowe (jawną postać tych macierzy podano w [H3, patrz wzory (2.6)–(2.13)]).

Duże kwantowe wielomiany Jacobiego dwu zmiennych  $P_{n,k}$  są ściśle związane z ortogonalnymi kwantowymi wielomianami Hahna dwu zmiennych  $H_{n,k}(x, y; a, b, c, N; q)$  [18] (patrz też [40, wzór (4.3)]) i z uogólnionymi wielomianami Bernsteina dwu zmiennych  $B_{k,l}^n(x, y; \omega|q)$  [40],

$$B_{k,l}^n(x, y; \omega|q) := (\omega; q)_n^{-1} \begin{bmatrix} n \\ k, l \end{bmatrix}_q x^k (\omega/x; q)_k y^l (x/y; q)_l (y; q)_{n-k-l} \quad (3.7)$$

(por. (1.4)), gdzie  $0 \leq k + l \leq n$ ,  $q \neq 1$  i  $\omega \neq 1, q^{-1}, \dots, q^{1-n}$  są parametrami rzeczywistymi, a

$$\begin{bmatrix} n \\ k, l \end{bmatrix}_q := \frac{(q; q)_n}{(q; q)_k (q; q)_l (q; q)_{n-k-l}}$$

jest tzw. uogólnionym symbolem  $q$ -Newtona (por. (1.3)). Mianowicie, w [40, twierdzenie 4.1] udowodniono następującą zależność:

$$B_{k,l}^n(x, y; \omega|q) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{\min(i, k+l)} F_{i,j} H_{i,j}(k, l; a^{-1}, b^{-1}, c^{-1}, n; q^{-1}) \cdot P_{i,j}(x, y; a, b, c, \omega/q; q) \quad (3.8)$$

dla znanych wielkości  $F_{i,j}$  oraz  $0 \leq k + l \leq n$ .

Biorąc pod uwagę zależności zachodzące pomiędzy bazami Bernsteina a wielomianami ortogonalnymi, które podano w paragrafie 1.2, relacja ta potwierdza nieprzypadkowość definicji uogólnionych wielomianów Bernsteina wielu zmiennych jaką zaproponowano w [40].

Wynik ten przywołujemy też z innego powodu. Był on bowiem podstawowym narzędziem w dowodzie cząstkowego równania  $q$ -różnicowego spełnianego przez wielomiany  $P_{n,k}$  (patrz [H3, str. 1559–1560]), które podajemy w formie poniższego twierdzenia.

**Twierdzenie 3.4** ([H3]). *Duże kwantowe wielomiany Jacobiego dwu zmiennych*

$$P_{n,k}(x, y; q) \equiv P_{n,k}(x, y; a, b, c, d; q) \quad (0 \leq k \leq n; n \in \mathbb{N})$$

spełniają następujące cząstkowe równanie  $q$ -różnicowe drugiego rzędu:

$$\begin{aligned} L_n P_{n,k}(x, y; q) &\equiv \{ l_{11}(x) \mathbf{D}_{q,x} \mathbf{D}_{q^{-1},x} + l_{22}(y) \mathbf{D}_{q,y} \mathbf{D}_{q^{-1},y} + l_{12}^-(x, y) \mathbf{D}_{q^{-1},x} \mathbf{D}_{q^{-1},y} \\ &\quad + l_{12}^+(x, y) \mathbf{D}_{q,x} \mathbf{D}_{q,y} + m_1(x) \mathbf{D}_{q,x} + m_2(y) \mathbf{D}_{q,y} + \mu_n \mathbf{I} \} P_{n,k}(x, y; q) = 0, \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} l_{11}(x) &:= (x - dq)(x - acq^2), & l_{22}(y) &:= (y - aq)(y - dq), \\ l_{12}^-(x, y) &:= q^{-1}(x - dq)(y - aq), & l_{12}^+(x, y) &:= acq^3(bx - d)(y - 1), \\ m_1(x) &:= \{ (abcq^3 - 1)(x - 1) - (acq^2 - 1)(dq - 1) \} / (q - 1), \\ m_2(y) &:= \{ (abcq^3 - 1)(y - 1) - (aq - 1)(dq - 1) \} / (q - 1), \\ \mu_n &:= -q^{1-n}(q^n - 1)(abcq^{n+2} - 1) / (q - 1)^2, \end{aligned}$$

$I$  oznacza operator identyficacyjny, a  $D_{q,x}$ ,  $D_{q,y}$  są operatorami  $q$ -różnicowymi postaci

$$D_{q,x}f(x, y) := \frac{f(qx, y) - f(x, y)}{(q-1)x}, \quad D_{q,y}f(x, y) := \frac{f(x, qy) - f(x, y)}{(q-1)y}. \quad (3.9)$$

#### 4. Inne wyniki

Już w czasie studiów autor zainteresował się tematyką funkcji specjalnych, wielomianów ortogonalnych i ich zastosowań w analizie numerycznej. Jako student i doktorant, prowadził badania dotyczące algorytmów konstrukcji związków rekurencyjnych dla współczynników Fouriera rozwinięć ortogonalnych. Ich wynikiem były prace [35], [77] i [37]. Drugi z wymienionych artykułów powstał w oparciu o pracę magisterską autora [76], a trzeci stanowił fragment jego pracy doktorskiej [78].

W wyniku współpracy z prof. prof. I. Area, E. Godoyem (Universidade de Vigo, Hiszpania), S. Lewanowiczem (Uniwersytet Wrocławski) i A. Ronveaux (Facultés Universitaires Notre-Dame de la Paix, Belgia) autor zainteresował się bazami Bernsteina i ich uogólnieniami. W artykule [3] zajmowano się własnościami kwantowych wielomianów Bernsteina (1.1) i ich związkami z małymi kwantowymi wielomianami Jacobiego. Badania te doprowadziły do wprowadzenia przez Lewanowicza i Woźnego uogólnionych wielomianów Bernsteina (1.4), których własnościom poświęcono pracę [36]. Wielowymiarowy wariant uogólnionych wielomianów Bernsteina zdefiniowano i zbadano w [40].

Wyniki prac [3] i [36] nie wiążą się w żaden sposób z tematyką doktoratu. Zostały jednak opublikowane jeszcze przed jego obroną i nie mogły wejść w skład rozprawy habilitacyjnej.

W kręgu zainteresowań autora są także metody przyspieszania zbieżności, a w szczególności sumowania szeregów wolnozbieżnych. Tej tematyce poświęcona jest praca [81] stanowiąca część rozprawy doktorskiej Nowaka [49]. Zaproponowano tam nowy sposób przyspieszania zbieżności szeregów, który szczególnie dobrze sprawdza się w wypadku wolnozbieżnych szeregów hipergeometrycznych, ich kwantowych odpowiedników oraz pewnych rozwinięć ortogonalnych. Szybką i efektywną numeryczną realizację tej metody opracowano w [79]. Wyniki tych prac były prezentowane na zaproszenie prof. prof. E. J. Wenigera (Universität Regensburg, Niemcy) i C. Brezinskiego (Université des Sciences et Technologies de Lille, Francja) podczas dwóch odczytów na konferencji *Approximation and extrapolation of convergent and divergent sequences and series*, CIRM Luminy, Francja, 28 września–2 października 2009 r.

W pracy [29] zbadano błąd i zbieżność metody całkowania funkcji szybko oscylujących zaproponowanej przez Kellera w [28], a wykorzystano do tego pewne własności operatorów różnicowych związanych z metodą Lewanowicza konstrukcji związków rekurencyjnych dla współczynników Czebyszewa [34].

#### 5. Aktualnie prowadzone badania

Badania prowadzone przez autora w ostatnim czasie dotyczą głównie wielomianów ortogonalnych, matematycznych metod grafiki komputerowej oraz ogólnej teorii i zastosowań baz dualnych.

I tak, w przyjętym właśnie do druku artykule [42] udowodniono, że duże kwantowe wielomiany Jacobiego dwu zmiennych  $P_{n,k}(x, y; a, b, c, d; q)$  [H3] (patrz też §3.3) spełniają następujące cztery *relacje struktury*:

$$\begin{aligned} \sigma_1^\pm(x, y)D_{q^\pm 1, x}\mathbb{P}_n &= F_{n,1}^\pm\mathbb{P}_{n-1} + G_{n,1}^\pm\mathbb{P}_n + H_{n,1}^\pm\mathbb{P}_{n+1}, \\ \sigma_2^\pm(x, y)D_{q^\pm 1, y}\mathbb{P}_n &= F_{n,2}^\pm\mathbb{P}_{n-1} + G_{n,2}^\pm\mathbb{P}_n + H_{n,2}^\pm\mathbb{P}_{n+1}, \end{aligned}$$

gdzie użyto oznaczeń (3.6), (3.9), natomiast  $\sigma_i^\pm$  ( $i = 1, 2$ ) są wielomianami dwu zmiennych stopnia  $\leq 2$ , a  $F_{n,i}^\pm$ ,  $G_{n,i}^\pm$ ,  $H_{n,i}^\pm$ , ( $i = 1, 2$ ) — macierzami trójkątnymi odpowiednich rozmiarów.

W wypadku  $d = 0$ , związanym z małymi kwantowymi wielomianami Jacobiego dwu zmiennych [13], podano jawną postać macierzy  $F_{n,i}^\pm$ ,  $G_{n,i}^\pm$ ,  $H_{n,i}^\pm$  ( $i = 1, 2$ ). Stosując przejścia graniczne, uzyskano stąd jawne wzory dla współczynników relacji struktury trójkątnych wielomianów Jacobiego [32], [14], które nie były dotąd znane.

W artykule [80] rozważany jest problem konstrukcji baz dualnych w ogólnej sytuacji (por. (2.1)). Zaproponowano tam algorytm rekurencyjnego znajdowania baz dualnych, który nie wymaga odwracania macierzy pełniej ani znajomości bazy ortogonalnej rozważanej przestrzeni (por. twierdzenie 2.1).

Szybsza o jeden rząd metoda konstrukcji baz dualnych w ogólnym wypadku została ostatnio przedstawiona przez autora w pracy [75], która niebawem zostanie zgłoszona do druku. Nową metodę zoptymalizowano pod kątem konstrukcji tzw. *dualnych funkcji B-sklejanych*, które mogą znaleźć szerokie zastosowanie w grafice komputerowej, np. w problemach obniżania stopnia czy usuwania węzłów krzywych i powierzchni sklejanych.

Badania dotyczące baz dualnych są wykonywane w ramach projektu badawczego *Dualne funkcje B-sklejane: konstrukcja i zastosowania* (numer: OPUS 2011/01/B/ST1/01221; kierownik: dr P. Woźny), finansowanego przez Narodowe Centrum Nauki.

## Literatura

- [1] Y. J. Ahn, Using Jacobi polynomials for degree reduction of Bézier curves with  $C^k$ -constraints, *Computer Aided Geometric Design* 20 (2003) 423–434.
- [2] Y. J. Ahn, B.-G. Lee, Y. Park, J. Yoo, Constrained polynomial degree reduction in the  $L_2$ -norm equals best weighted Euclidean approximation of Bézier coefficients, *Computer Aided Geometric Design* 21 (2004) 181–191.
- [3] I. Area, E. Godoy, P. Woźny, S. Lewanowicz, A. Ronveaux, Formulae relating little  $q$ -Jacobi,  $q$ -Hahn and  $q$ -Bernstein polynomials: Application to the  $q$ -Bézier curve evaluation, *Integral Transforms and Special Functions* 15 (2004) 375–385.
- [4] D. Bakhshesh, M. R. Samiee, The weighted dual functions for Wang-Said type generalized Ball bases with and without boundary constraints, *International Journal of Computer and Electrical Engineering* 4 (2012) 573–577.
- [5] M. Bartoň, B. Jüttler, Computing roots of polynomials by quadratic clipping, *Computer Aided Geometric Design* 24 (2007) 125–141.
- [6] G. Brunnett, T. Schreiber, J. Braun, The geometry of optimal degree reduction of Bézier curves, *Computed Aided Geometric Design* 13 (1996) 773–788.
- [7] Ç. Dişibüyük, H. Oruç, A generalization of rational Bernstein-Bézier curves, *BIT Numerical Mathematics* 47 (2007) 313–323.
- [8] Ç. Dişibüyük, H. Oruç, Tensor product  $q$ -Bernstein polynomials, *BIT Numerical Mathematics* 48 (2008) 689–700.
- [9] G.-D. Chen, G.-J. Wang, Optimal degree reduction of Bézier curves with constraints of endpoints continuity, *Computer Aided Geometric Design* 19 (2002) 365–377.
- [10] X.-D. Chen, W. Ma, J.-C. Paul, Multi-degree reduction of Bézier curves using reparameterization, *Computer-Aided Design* 43 (2011) 161–169.
- [11] Z. Ciesielski, The basis of B-splines in the space of algebraic polynomials, *Ukrainian Mathematical Journal* 38 (1987) 311–315.
- [12] Z. Ciesielski, Explicit formula relating the Jacobi, Hahn and Bernstein polynomials, *SIAM Journal on Mathematical Analysis* 18 (1987) 1573–1575.
- [13] C. F. Dunkl, Orthogonal polynomials in two variables of  $q$ -Hahn and  $q$ -Jacobi type, *SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods* 1 (1980) 137–151.
- [14] C. F. Dunkl, *Y. Xu, Orthogonal Polynomials of Several Variables*, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [15] M. Eck, Least squares degree reduction of Bézier curves, *Computer-Aided Design* 27 (1995) 845–851.
- [16] G. Farin, *Curves and Surfaces for Computer-Aided Geometric Design. A Practical Guide*, 3rd ed., Academic Press, Boston, 1993.

- [17] R. T. Farouki, Convergent inversion approximations for polynomials in Bernstein form, *Computer Aided Geometric Design* 17 (2000) 179–196.
- [18] G. Gasper, M. Rahman, Some systems of multivariable orthogonal  $q$ -Racah polynomials, *Ramanujan Journal* 13 (2007) 389–405.
- [19] R. Goldman, P. Simeonov, Formulas and algorithms for quantum differentiation of quantum Bernstein Bases and quantum Bézier curves based on quantum blossoming, *Graphical Models* 74 (2012) 326–334.
- [20] R. N. Goldman, Dual polynomial bases, *Journal of Approximation Theory* 79 (1994) 311–346.
- [21] Z. Guohui, L. Xiuping, S. Zhixun, A dual functional to the univariate B-spline, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 195 (2006) 292–299.
- [22] Q.-Q. Hu, G.-J. Wang, A novel algorithm for explicit optimal multi-degree reduction of triangular surfaces, *Science in China, Series F – Information Sciences* 51 (2008) 13–24.
- [23] Q.-Q. Hu, G.-J. Wang, Optimal multi-degree reduction of triangular Bézier surfaces with corners continuity in the norm  $L_2$ , *Journal of Computational and Applied Mathematics* 215 (2008) 114–126.
- [24] S. M. Hu, Z. Zuo, J. G. Sun, Approximate degree reduction of triangular Bézier surfaces, *Tsinghua Science & Technology* 3 (1998) 1001–1004.
- [25] H. X. Jiang, Y. Wu, Voronovskaya-type formulas for  $\omega, q$ -Bernstein polynomials, *Acta Mathematica Sinica* 56 (2013) 135–144.
- [26] B. Jüttler, The dual basis functions of the Bernstein polynomials, *Advances in Computational Mathematics* 8 (1998) 345–352.
- [27] S. Karlin, J. McGregor, Linear growth models with many types and multidimensional Hahn polynomials, in: R. A. Askey (ed.), *Theory and Application of Special Functions*, Academic Press, New York, 1975, pp. 261–288.
- [28] P. Keller, A method for indefinite integration of oscillatory and singular functions, *Numerical Algorithms* 46 (2007) 219–251.
- [29] P. Keller, P. Woźny, On the convergence of the method for indefinite integration of oscillatory and singular functions, *Applied Mathematics and Computation* 216 (2010) 989–998.
- [30] H. S. Kim, Y. J. Ahn, Constrained degree reduction of polynomials in Bernstein-Bézier form over simplex domain, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 216 (2008) 14–19.
- [31] R. Koekoek, R. F. Swarttouw, The Askey scheme of hypergeometric orthogonal polynomials and its  $q$ -analogue, raport 98–17, Faculty of Technical Mathematics and Informatics, Delft University of Technology, Delft (1998).
- [32] T. Koornwinder, Two-variable analogues of the classical orthogonal polynomials, in: R. A. Askey (ed.), *Theory and application of special functions*, Academic Press, New York, 1975, pp. 435–495.
- [33] B.-G. Lee, Y. Park, J. Yoo, Application of Legendre-Bernstein basis transformations to degree elevation and degree reduction, *Computer Aided Geometric Design* 19 (2002) 709–718.
- [34] S. Lewanowicz, A new approach to the problem of constructing recurrence relations for the Jacobi coefficients, *Applicationes Mathematicae* 21 (1991) 303–326.
- [35] S. Lewanowicz, P. Woźny, Algorithms for construction of recurrence relations for the coefficients of expansions in series of classical orthogonal polynomials, raport, Instytut Informatyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Wrocław (2001).
- [36] S. Lewanowicz, P. Woźny, Generalized Bernstein polynomials, *BIT Numerical Mathematics* 44 (2004) 63–78.
- [37] S. Lewanowicz, P. Woźny, Recurrence relations for coefficients in series expansions with respect to semi-classical orthogonal polynomials, *Numerical Algorithms* 35 (2004) 61–79.
- [38] S. Lewanowicz, P. Woźny, Bézier representation of the constrained dual Bernstein polynomials, *Applied Mathematics and Computation* 218 (2011) 4580–4586.
- [39] S. Lewanowicz, P. Woźny, Multi-degree reduction of tensor product Bézier surfaces with general boundary constraints, *Applied Mathematics and Computation* 217 (2011) 4596–4611.

- [40] S. Lewanowicz, P. Woźny, I. Area, E. Godoy, Multivariate generalized Bernstein polynomials: Identities for orthogonal polynomials of two variables, *Numerical Algorithms* 49 (2008) 199–220.
- [41] S. Lewanowicz, P. Woźny, P. Keller, Polynomial approximation of rational Bézier curves with constraints, *Numerical Algorithms* 59 (2012) 607–622.
- [42] S. Lewanowicz, P. Woźny, R. Nowak, Structure relations for the bivariate big  $q$ -Jacobi polynomials, *Applied Mathematics and Computation* (2013), przyjęto do druku, <http://dx.doi.org/10.1016/j.amc.2013.02.059>.
- [43] L. Liu, L. Zhang, B. Lin, G. Wang, Fast approach for computing roots of polynomials using cubic clipping, *Computer Aided Geometric Design* 26 (2009) 547–559.
- [44] L. Lu, A note on constrained degree reduction of polynomials in Bernstein-Bézier form over simplex domain, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 228 (2009) 324–326.
- [45] L. Lu, G. Wang, Multi-degree reduction of triangular Bézier surfaces with boundary constraints, *Computer Aided Geometric Design* 38 (2006) 1215–1223.
- [46] L. Lu, G. Wang, Optimal degree reduction of Bézier curves with  $G^2$ -continuity, *Computer Aided Geometric Design* 23 (2006) 673–683.
- [47] L. Lu, G. Wang, Application of Chebyshev II-Bernstein basis transformations to degree reduction of Bézier curves, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 221 (2008) 52–65.
- [48] M. Neamtu, A contribution to the theory and practice of multivariate splines, praca doktorska, University of Twente (1991).
- [49] R. Nowak, Przyspieszanie zbieżności szeregów i ułamków łańcuchowych, praca doktorska, Instytut Informatyki Uniwersytetu Wrocławskiego (2009).
- [50] H. Oruç, Ç. Dişibüyük, Tensor product  $q$ -Bernstein Bézier patches, *Lecture Notes in Computer Science* 5434 (2009) 265–272.
- [51] H. Oruç, G. M. Phillips,  $q$ -Bernstein polynomials and Bézier curves, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 151 (2003) 1–12.
- [52] M. Petkovšek, H. S. Wilf, D. Zeilberger,  $A = B$ , A K Peters Ltd., Wellesley, MA, 1996.
- [53] G. M. Phillips, On generalized Bernstein polynomials, in: D. F. Griffiths, G. A. Watson (eds.), *Numerical Analysis: A. R. Mitchell 75th Birthday Volume*, World Science, Singapore, 1996, pp. 263–269.
- [54] G. M. Phillips, A survey of results on the  $q$ -Bernstein polynomials, *IMA Journal of Numerical Analysis* 30 (2010) 277–288.
- [55] A. Rababah, Distance for degree raising and reduction of triangular Bézier surfaces, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 158 (2003) 233–241.
- [56] A. Rababah,  $L_2$  degree reduction of triangular Bézier surfaces with common tangent planes at vertices, *International Journal of Computational Geometry & Applications* 15 (2005) 477–490.
- [57] A. Rababah, M. Al-Natour, The weighted dual functionals for the univariate Bernstein basis, *Applied Mathematics and Computation* 186 (2007) 1581–1590.
- [58] A. Rababah, M. Al-Natour, Weighted dual functions for Bernstein basis satisfying boundary conditions, *Applied Mathematics and Computation* 199 (2008) 1581–1590.
- [59] A. Rababah, B.-G. Lee, J. Yoo, A simple matrix form for degree reduction of Bézier curves using Chebyshev-Bernstein basis transformations, *Applied Mathematics and Computation* 181 (2006) 310–318.
- [60] A. Rababah, S. Mann, Iterative process for  $G^2$ -multi degree reduction of Bézier curves, *Applied Mathematics and Computations* 217 (2011) 8126–8133.
- [61] A. Rababah, S. Mann, Linear methods for  $G^1$ ,  $G^2$ , and  $G^3$  – Multi-degree reduction of Bézier curves, *Computer-Aided Design* 45 (2013) 405–414.
- [62] L. Ramshaw, Blossoming: A Connect-the-Dots Approach to Splines, raport 19, Systems Research Center, California (1987).
- [63] J. Rodal, I. Area, E. Godoy, Orthogonal polynomials of two discrete variables on the simplex, *Integral*



- Transforms and Special Functions 16 (2005) 263–280.
- [64] A. Ronveaux, A. Zarzo, I. Area, E. Godoy, Bernstein bases and Hahn-Eberlein orthogonal polynomials, *Integral Transforms and Special Functions* 7 (1998) 87–96.
- [65] P. Sablonnière, Discrete Bézier curves and surfaces, in: T. Lyche, L. L. Schumaker (eds.), *Mathematical Methods in Computer Aided Geometric Design II*, Academic Press, New York, 1992, pp. 497–515.
- [66] P. Sablonnière, Discrete Bernstein bases and Hahn polynomials, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 49 (1993) 233–241.
- [67] T. W. Sederberg, T. Nishita, Curve intersection using Bézier clipping, *Computer Aided Geometric Design* 22 (1990) 538–549.
- [68] P. Simeonov, V. Zafiris, R. Goldman,  $h$ -Blossoming: A new approach to algorithms and identities for  $h$ -Bernstein bases and  $h$ -Bézier curves, *Computer Aided Geometric Design* 28 (2011) 549–565.
- [69] P. Simeonov, V. Zafiris, R. Goldman,  $q$ -Blossoming: A new approach to algorithms and identities for  $q$ -Bernstein bases and  $q$ -Bézier curves, *Journal of Approximation Theory* 164 (2012) 77–104.
- [70] H. Sunwoo, Matrix representation for multi-degree reduction of Bézier curves, *Computer Aided Geometric Design* 22 (2005) 261–273.
- [71] H. Sunwoo, N. Lee, A unified matrix representation for degree reduction of Bézier curves, *Computer Aided Geometric Design* 21 (2004) 151–164.
- [72] M. V. Tratnik, Some multivariate orthogonal polynomials of the Askey tableau – discrete families, *Journal of Mathematical Physics* 32 (1991) 2337–2342.
- [73] H. Wang, Properties of convergence for  $\omega$ ,  $q$ -Bernstein polynomials, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 340 (2008) 1096–1108.
- [74] H. Wang, Shape-preserving properties of  $\omega$ ,  $q$ -Bernstein polynomials, *Linear Algebra and its Applications* 430 (2009) 957–967.
- [75] P. Woźny, Construction of dual B-spline functions (2013), <http://www.ii.uni.wroc.pl/~pwo/programs/dualSplines.pdf>.
- [76] P. Woźny, Związki rekurencyjne dla współczynników rozwinięcia funkcji w szereg względem klasycznych wielomianów ortogonalnych zmiennej dyskretnej, praca magisterska, Instytut Informatyki Uniwersytetu Wrocławskiego (2001).
- [77] P. Woźny, Recurrence relations for the coefficients of expansions in classical orthogonal polynomials of a discrete variable, *Applicationes Mathematicae* 30 (2003) 89–107.
- [78] P. Woźny, Własności współczynników Fouriera względem semiklasycznych wielomianów ortogonalnych, praca doktorska, Instytut Informatyki Uniwersytetu Wrocławskiego (2004).
- [79] P. Woźny, Efficient algorithm for summation of some slowly convergent series, *Applied Numerical Mathematics* 60 (2010) 1442–1453.
- [80] P. Woźny, Construction of dual bases, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 245 (2013) 75–85.
- [81] P. Woźny, R. Nowak, Method of summation of some slowly convergent series, *Applied Mathematics and Computation* 215 (2009) 1622–1645.
- [82] Y. Xu, On discrete orthogonal polynomials of several variables, *Advances in Applied Mathematics* 33 (2004) 615–632.
- [83] L. Zhang, J. Tan, Z. Dong, The dual bases for the Bézier-Said-Wang type generalized Ball polynomial bases and their applications, *Applied Mathematics and Computation* 217 (2010) 3088–3101.
- [84] L. Zhang, J. Tan, H. Wu, Z. Liu, The weighted dual functions for Wang-Bézier type generalized Ball bases and their applications, *Applied Mathematics and Computation* 215 (2009) 22–36.
- [85] L. Zhang, H. Wu, J. Tan, Dual bases for Wang-Bézier basis and their applications, *Applied Mathematics and Computation* 214 (2009) 218–227.
- [86] L. Zhang, H. Wu, J. Tan, Dual basis functions for the NS power and their applications, *Applied Mathematics and Computation* 207 (2009) 434–441.