Autoreferat

1. Imię i nazwisko: Roman Wencel

2. Stopnie naukowe

(a) Magister matematyki (specjalność: matematyka teoretyczna), stopień uzyskany 2.09.1998 r. Miejsce uzyskania: Uniwersytet Wrocławski. Tytuł pracy magisterskiej: *Pseudotypy i klasa* K_Q. Promotor: prof. Ludomir Newelski.

(b) Doktor nauk matematycznych w zakresie matematyki, stopień uzyskany 27.06.2002 r. Miejsce uzyskania: Uniwersytet Wrocławski. Tytuł rozprawy doktorskiej: *Struktury o-minimalne uporządkowane boolowsko*. Promotor: prof. Ludomir Newelski.

3. Informacja o dotychczasowym zatrudnieniu

- Od 1.10.2002: Instytut Matematyczy Uniwersytetu Wrocławskiego; adiunkt/adiunkt naukowy.
- 1.04.2004–31.03.2006: School of Mathematics, University of Leeds (Wielka Brytania), Wewnątrzeuropejskie Stypendium im. Marii Curie (Marie Curie Intra-European Fellowship); research fellow.

4. Wskazanie osiągnięcia naukowego

Tytuł rozprawy habilitacyjnej:

Własności zbiorów definiowalnych w strukturach słabo o-minimalnych

Prace wchodzące w skład rozprawy habilitacyjnej:

[1] R. Wencel, *Weakly o-minimal non-valuational structures*, Ann. Pure Appl. Logic 154 (2008), 139–162.

[2] R. Wencel, *On expansions of weakly o-minimal non-valuational structures by convex predicates*, Fund. Math. 202 (2009), 147–159.

[3] R. Wencel, *Weakly o-minimal expansions of ordered fields of finite transcendence degree*, Bull. Lond. Math. Soc. 41 (2009), 109–116.

[4] R. Wencel, *Topological properties of sets definable in weakly o-minimal structures*, J. Symbolic Logic 75 (2010), 841–863.

A) Tło historyczne

Wyniki rozprawy habilitacyjnej dotyczą struktur słabo o-minimalnych — tematyki zasadniczo należącej do klasycznej teorii modeli, ale też do pewnego stopnia związanej z geometrią semialgebraiczną oraz topologią. Celem niniejszej części jest krótkie przedstawienie tła historycznego oraz opisanie miejsca słabej o-minimalności w teorii modeli.

Do początków teorii modeli zaliczyć można pierwsze badania nad językami formalnymi oraz ich interpretacjami w strukturach matematycznych z lat 20-tych oraz 30-tych XX wieku. Z tego okresu pochodzą twierdzenia Gödla o niezupełności, metoda eliminacji kwantyfikatorów (Langord, Presburger, Tarski) oraz formalizacja pojęć takich jak spełnianie, definiowalność czy elementarna równoważność. Podstawy teorii modeli stworzone zostały przede wszystkim przez A. Tarskiego i J. Robinsona do końca lat 50-tych XX wieku.

Na początku lat 50-tych A. Tarski, uogólniając algorytm Sturma znajdywania liczby pierwiastków rzeczywistych wielomianu jednej zmiennej, udowodnił, że w teorii ciał rzeczywiście domkniętych dowolna formuła jest równoważna formule bez kwantyfikatorów. Wspomniane twierdzenie implikuje, iż zbiory definiowalne w ciałach rzeczywiście domkniętych to dokładnie zbiory semialgebraiczne, czyli skończone boolowskie kombinacje zbiorów wyznaczonych przez równania oraz nierówności wielomianowe. W szczególności oznacza to, że: (a) dowolny definiowalny podzbiór ciała rzeczywiście domkniętego jest sumą skończenie wielu przedziałów (tu i dalej przyjmujemy konwencję, że przedział może być jednopunktowy), (b) rzut zbioru semialgebraicznego jest zbiorem semialgebraicznym (twierdzenie Tarskiego-Seidenberga).

Niezwykle ważnym wydarzeniem dla rozwoju teorii modeli był dowód twierdzenia Morleya o kategoryczności z 1965 roku [Mor] mówiącego, że teoria zupełna w języku przeliczalnym, która jest κ-kategoryczna dla pewnej nieprzeliczalnej liczby kardynalnej κ musi być κ-kategoryczna dla wszystkich nieprzeliczalnych κ (teoria jest κ kategoryczna, jeśli z dokładnością do izomorfizmu ma jedyny model mocy κ). W dowodzie twierdzenia Morley'a pojawiły się metody kombinatoryczne oraz topologiczne a także nowe pojęcia (jak przestrzenie topologiczne typów czy rangi typów i formuł), które wywarły ogromny wpływ na dalszy rozwój teorii modeli prowadząc do powstania nowej jej gałęzi — teorii stabilności.

Teoria stabilności została znacznie rozwinięta w latach 70-tych (głównie przez Shelaha), stając się narzędziem do tzw. teorii klasyfikacji [Sh]. Shelah dokonał rozróżnienia między teoriami, których modele można sklasyfikować przy pomocy pewnych niezmienników a tymi, które posiadają zbyt wiele modeli, by taka klasyfikacja była możliwa. Shelah pokazał na przykład, że teoria niesuperstabilna ma 2^κ (a więc maksymalnie wiele) modeli mocy κ dla dowolnej liczby kardynalnej κ większej niż $\aleph_0$. Innym wynikiem w duchu teorii klasyfikacji jest dowód hipotezy Vaughta dla teorii ω-stabilnych z początku lat 80-tych [HMS]. Wynika z niego, że jeśli teoria ω-stabilna ma mniej niż $2^{\aleph_0}$ modeli przeliczalnych, to ma ich przeliczalnie wiele, przy czym każdy z nich jest pierwszy nad pewnym zbiorem parametrów.

Na początku lat 80-tych L. van den Dries rozważał tzw. wzbogacenia skończonego typu dla uporządkowanego ciała liczb rzeczywistych. Zauważył wówczas, że wiele spośród własności zbiorów semialgebraicznych jest konsekwencją kilku prostych aksjomatów o charakterze geometrycznym [vdD0]. Niedługo później A. Pillay oraz C. Steinhorn wprowadzili abstrakcyjne pojęcie struktury o-minimalnej, to znaczy struktury liniowo uporządkowanej, dla której dowolny definiowalny podzbiór uniwersum jest sumą skończenie wielu przedziałów [PS]. Innymi słowy, w wymiarze 1 definiowalne są dokładnie te zbiory, które dadzą się określić za pomocą samego porządku bez użycia kwantyfikatorów. Można powiedzieć więc, że wprowadzone przez van den Driesa struktury skończonego typu to szczególny przypadek struktur o-minimalnych.

Do struktur o-minimalnych należą: gęste porządki liniowe, abelowe podzielne grupy uporządkowane, uporządkowane ciała rzeczywiście domknięte oraz uporządkowane przestrzenie liniowe nad ciałami uporządkowanymi. Wśród typowych przykładów struktur o-minimalnych istotne miejsce zajmują wzbogacenia ciała liczb rzeczywistych. Można tutaj wymienić: ciało liczb rzeczywistych z funkcją eksponencjalną, ciało liczb rzeczywistych wraz ze wszystkimi funkcjami analitycznymi ograniczonymi do kostek postaci I^n, gdzie I jest ustalonym odcinkiem, wzbogacenia o funkcje Pfaffa (pfaffiany) i wiele innych. Jedną z zaskakujących własności o-minimalnych wzbogaceń ciał rzeczywiście domkniętych jest tak zwana dychotomia Millera — własność mówiąca, że jeśli dana struktura nie jest potęgowo ograniczona, to w jej języku zdefiniować można funkcję eksponencjalną [Mi1, Mi2].

W latach 80-tych i 90-tych zaczęto rozwijać ogólną teorię struktur o-minimalnych. Pojawiło się wiele twierdzeń i metod uogólniających różne fragmenty geometrii semialgebraicznej (jak np. rozkłady komórkowe, teoria wymiaru i charakterystyki Eulera, własności topologiczne, triangulacje, teoria homologii, rozmaitości definiowalne). Badano też różne struktury algebraiczne (jak grupy czy ciała) definiowalne w strukturach o-minimalnych. Ważnym wynikiem na temat struktur o-minimalnych z drugiej połowy lat 90-tych jest twierdzenie Y. Peterzila i S. Starchenki o trychotomii [PeS] mówiące, że jeśli $\mathcal{M} = (M, \leq, \dots)$ jest strukturą o-minimalną, to dla dowolnego $a \in M$, w pewnym otoczeniu I punktu a zachodzi jedna z trzech możliwości: (a) struktura indukowana na I przez $\mathcal{M}$ jest trywialna; (b) $\mathcal{M}$ indukuje na I strukturę uporządkowanej przestrzeni liniowej; (c) $\mathcal{M}$ indukuje na I strukturę pewnego wzbogacenia ciała rzeczywiście domkniętego.

Pomimo tego, że z punktu widzenia teorii klasyfikacji Shelaha teorie o-minimalne są „złe”, udało się w tym przypadku zaadaptować część metod wypracowanych w teorii stabilności. Na przykład, pod koniec lat 80-tych L. Mayer, używając idei z dowodu hipotezy Vaughta dla teorii ω-stabilnych, pokazała, że liczba przeliczalnych modeli przeliczalnej teorii o-minimalnej jest równa zawsze albo $3^m 6^n$ (gdzie $m, n \in \mathbb{N}$) albo $2^{\aleph_0}$ [May].

Typowym argumentem stosowanym przy dowodach o-minimalności jest eliminacja kwantyfikatorów do pewnego poziomu, zwykle oparta na własnościach geometrycznych bądź topologicznych odpowiednich rodzin zbiorów. Na przyład o-minimalność uporządkowanego ciała liczb rzeczywistych jest konsekwencją twierdzenia Tarskiego-Seidenberga. Dla struktury $\mathcal{R}_{exp} := (\mathbb{R}, \leq, +, \cdot, exp)$ w latach 90-tych A. Wilkie pokazał, że jej teoria jest modelowo zupełna, to znaczy, że dowolna formuła w $Th(\mathcal{R}_{exp})$ jest równoważna formule egzystencjalnej. Warto dodać że własności struktury $\mathcal{R}_{exp}$ są też powiązane z hipotezą Schanuela z teorii liczb. Mianowicie, prawdziwość tej hipotezy implikuje, że teoria $Th(\mathcal{R}_{exp})$ jest rozstrzygalna.

W ciągu ostatnich dwóch dekad w teorii modeli pojawiło się wiele wyników dotyczących różnych klas struktur spełniających tak zwane warunki minimalności (często będące wariantami lub uogólnieniami o-minimalności). Typowy warunek minimalności rozważany w teorii modeli jest następującej postaci. Niech $\mathcal{M} = (M, ...)$ będzie strukturą I rzędu dla języka L i niech $L_0 \subseteq L$. Mówimy, że $\mathcal{M}$ jest minimalna względem L_0, jeśli dowolny zbiór $X \subseteq M$ definiowalny w $\mathcal{M}$ można zdefiniować przy pomocy formuły języka L_0 bez kwantyfikatorów. W przypadku gdy jedynym symbolem języka L_0 jest dwuargumentowa relacja $\leq$ interpretowana w $\mathcal{M}$ jako porządek liniowy, dostajemy pojęcie o-minimalności. Jeśli zaś $L_0 = \{=\}$ — pojęcie silnej minimalności (strukturą silnie minimalną jest na przykład ciało algebraicznie domknięte). Innymi przykładami struktur określonych za pomocą warunku minimalności są struktury C-minimalne (to znaczy struktury z pewną relacją trzyargumentową, spełniającą kilka aksjomatów imitujących własności waluacji w ciałach algebraicznie domkniętych), struktury p-minimalne (związane z ciałami p-adycznie domkniętymi) i o-minimalne wzbogacenia pewnych porządków częściowych (np. indukowanych z bezatomowych algebr Boole'a).

Struktury słabo o-minimalne, będące tematem niniejszej rozprawy, są uogólnieniem struktur o-minimalnych wprowadzonym przez M. Dickamanna w latach 80-tych [D]. Zgodnie z definicją są to struktury liniowo uporządkowane, dla których zbiory definiowalne w wymiarze 1 są skończonymi sumami zbiorów wypukłych. Przykład struktury słabo o-minimalnej, która nie jest o-minimalna stanowi ciało rzeczywiście domknięte z nietrywialną waluacją. Dowolnej struktury słabo o-minimalnej na ogół nie można uważać za minimalną względem pewnego języka L_0 (chyba, że wzbogacimy język danej struktury o predykaty określające wszystkie wypukłe definiowalne podzbiory uniwersum). Bardziej szczegółowe wprowadzenie do tematyki struktur słabo o-minimalnej znajduję się w następnym podrozdziale.

Nałożenie teoriomiodelowego warunku minimalności na strukturę taką jak grupa czy ciało może pociągać za sobą pewne konsekwencje algebraiczne. Na przykład ciała C-minimalne są algebraicznie domknięte zaś uporządkowane ciała słabo o-minimalne — rzeczywiście domknięte. Wyniki o podobnym charakterze zostały udowodnione również w kontekście teorii stabilności. Przykładowo: dowolne ciało superstabilne jest algebraicznie domknięte.

Struktury o-miniamlne (z porządkiem liniowym lub boolowskim), słabo o-minimalne, C-minimalne oraz p-minimalne są przykładami tak zwanych struktur topologicznych I rzędu, wprowadzonych przez A. Pillay'a [Pi1] w latach osiemdziesiątych jako uogólnienie pojęcia o-minimalności i badanych abstrakcyjnie m.in. przez L. Matthewsa [Ma1, Ma2]. Mówimy, że struktura $\mathcal{M} = (M, \dots)$ dla języka L jest strukturą topologiczną pierwszego rzędu, jeśli dla pewnej formuły $\varphi(x, \overline{y})$ języka L, rodzina $\{\varphi(M, \overline{a}) : \overline{a} \in M^{|\overline{y}|}\}$ stanowi bazę topologii M. Na przykład, jeśli $\mathcal{M} = (M, \leq, \dots)$ jest strukturą o-minimalną z gęstym porządkiem liniowym bez końców, to bazą topologii wyznaczonej przez porządek $\leq$ jest np. rodzina wszystkich ograniczonych przedziałów otwartych, z których każdy jest wyznaczony przez formułę postaci $a < x < b$, gdzie $a, b \in M$.

Struktura topologiczna I rzędu, której topologia jest T_1 i nie jest dyskretna ma ścisłą własność porządkową, a więc jest niestabilna. Najczęściej rozważane przykłady struktur topologicznych I rzędu również nie mają własności niezależności. Badanie struktur topologicznych I rzędu w pełnej ogólności wydaje się być bardzo trudne, dlatego zwykle zakłada się, że topologia takiej struktury spełnia pewne aksjomaty imitujące wybrane własności topologii np. w strukturach o-minimalnych. Innym typowym założeniem jest też przyjęcie, że w strukturze topologicznej I rzędu oprócz topologii mamy określone pojęcie wymiaru spełniające pewne bardzo naturalne założenia. Struktury słabo o-minimalne stanowią typowy przykład niestabilnych struktur topologicznych I rzędu z pojęciem wymiaru.

B) Struktury słabo o-minimalne — podstawowe definicje i fakty

Niech $(M, \leq)$ będzie gęstym porządkiem liniowym bez końców. Mówimy, że zbiór $I \subseteq M$ jest wypukły, jeśli dla dowolnych $a, b \in I$ oraz $c \in M$, warunek $a < c < b$ implikuje, że $c \in I$. Strukturę I rzędu $\mathcal{M} = (M, \leq, \dots)$ będącą wzbogaceniem porządku $(M, \leq)$ nazywamy słabo o-minimalną, jeśli dowolny zbiór $X \subseteq M$ definiowalny w $\mathcal{M}$ jest sumą skończenie wielu zbiorów wypukłych. Przykładami zbiorów wypukłych są oczywiście przedziały, w związku z czym dowolna struktura o-minimalna jest słabo o-minimalna. Parę uporządkowaną $\langle C, D\rangle$ niepustych podzbiorów M nazywamy przekrojem (Dedekinda) porządku $(M, \leq)$ jeśli $C < D$ (tzn. $x < y$ dla $x \in C, y \in D$) oraz $C \cup D = M$.

Niech $\mathcal{M} = (M, \leq, \dots)$ będzie strukturą słabo o-minimalną. Przekrój $\langle C, D\rangle$ nazywamy definiowalnym w $\mathcal{M}$, jeśli zbiory C, D są definiowalne w $\mathcal{M}$. Zbiór wszystkich przekrojów $\langle C, D\rangle$ porządku

$(M, \leq)$ definiowalnych w $\mathcal{M}$ i takich, że D nie posiada elementu najmniejszego, oznaczamy przez $\overline{M}^{\mathcal{M}}$ i nazywamy uzupełnieniem M (względem struktury $\mathcal{M}$). Dla struktury $\mathcal{M}$ definiujemy też uzupełnienie zbioru wypukłego $I \subseteq M$ jako

$$\overline{I}^{\mathcal{M}} := \{a \in \overline{M}^{\mathcal{M}} : (\exists b, c \in I)(b < a < c)\}.$$

W $\overline{M}^{\mathcal{M}}$ określony jest naturalny porządek liniowy (gęsty, bez końców): $\langle C, D\rangle \leq \langle C', D'\rangle$ wtedy i tylko wtedy, gdy $C \subseteq C'$. Element $a \in M$ utożsamiamy z przekrojem $\langle(-\infty, a], (a, +\infty)\rangle$. W ten sposób uniwersum M struktury $\mathcal{M}$ można uważać za gęsty podzbiór zbioru $\overline{M}^{\mathcal{M}}$. Dalej przyjmujemy, że $M \subseteq \overline{M}^{\mathcal{M}}$. Jeśli $(M, \leq)$ jest porządkiem zupełnym (np. $(\mathbb{R}, \leq)$) lub $\mathcal{M}$ jest strukturą o-minimalną, to przy przyjętej konwencji oczywiście mamy $\overline{M}^{\mathcal{M}} = M$.

Własność słabej o-minimalności nie jest zachowywana przez relację elementarnej równoważności. Oznacza to na przykład, że elementarne rozszerzenie struktury słabo o-minimalnej nie musi być słabo o-minimalne. Można podać przykład struktury słabo o-minimalnej $\mathcal{M}$ oraz definiowalnej rodziny podzbiorów jej uniwersum takiej, że liczba składowych wypukłych elementów tej rodziny nie jest jednostajnie ograniczona [MMS], co oznacza, że w pewnym elementarnym rozszerzeniu $\mathcal{M}$ istnieje definiowalny podzbiór uniwersum nie będący sumą skończenie wielu zbiorów wypukłych. W związku z tym rozważa się pojęcie słabej o-minimalności teorii. Mówimy, że teoria zupełna T w języku zawierającym symbol relacji binarnej $\leq$ jest słabo o-minimalna, jeśli wszystkie jej modele są strukturami słabo o-minimalnymi, przy czym $\leq$ w każdym z nich interpretuje się jako gęsty porządek liniowy bez końców.

Pojęcie słabej o-minimalności pojawiło się po raz pierwszy w pracy [D], gdzie (bazując na wynikach pracy [ChD]) wykazano, że teoria pierścieni rzeczywiście domkniętych z waluacją jest słabo o-minimalna. W [Ku1] i [Ku2] badane są wzbogacenia podzielnych abelowych grup uporządkowanych o pewną funkcję jednej zmiennej, zwaną kontrakcją. Teoria takiego wzbogacenia również jest słabo o-minimalna, zaś jej modele nie są strukturami o-minimalnymi.

Struktury słabo o-minimalne pojawiają się również przy rozpatrywaniu tzw. odwzorowania części standardowej. Niech $\mathcal{R} = (R, \leq, +, \cdot, \ldots)$ będzie o-minimalnym wzbogaceniem ciała rzeczywiście domkniętego, V właściwym wypukłym podpierścieniem $(R, \leq, +, \cdot)$, zaś $\mathfrak{m}$ jedynym ideałem maksymalnym R. Oznaczmy przez k ciało rezydualne $V/\mathfrak{m}$. Odwzorowanie części standardowej $\mathrm{st} : V \longrightarrow k$ elementowi $a \in V$ przyporządkowuje jego resztę modulo $\mathfrak{m}$. Struktura k_{ind}, będąca wzbogaceniem k o części standardowe zbiorów definiowalnych w potęgach V, jest zawsze słabo o-minimalna.

Naturalnym modelem teorii słabo o-minimalnej jest wzbogacenie struktury o-minimalnej o rodzinę predykatów wypukłych [BP]. Ogólniej, wzbogacenie modelu teorii słabo o-minimlnej o rodzinę predykatów wypukłych jest modelem teorii słabo o-minimalnej [Bz]. Ten ostatni wynik jest łatwym wnioskiem z twierdzenia Shelaha [Sh783] mówiącego, że jeśli $\mathcal{M}$ jest odpowiednio nasyconym modelem teorii z własnością NIP, to teoria jego wzbogacenia o wszystkie zbiory zewnętrznie definiowalne ma redukcję kwantyfikatorów. Otwarty pozostaje problem, czy wzbogacenie struktury słabo o-minimalnej o predykat wypukły jest zawsze strukturą słabo o-minimalną.

Teorie słabo o-minialne są niestabilne, a dokładniej posiadają ścisłą własność porządkową lecz nie mają własności niezależności (innymi słowy, mają NIP). Nie wiadomo, czy teoria dowolnej struktury słabo o-minimalnej ma NIP.

Niech $\mathcal{M} = (M, \leq, \ldots)$ będzie strukturą słabo o-minimalną. Jeśli $I \subseteq M$ jest nieskończonym zbiorem definiowalnym w $\mathcal{M}$, to dla funkcji definiowalnej $f : I \longrightarrow M$ istnieje nieskończony przedział $J \subseteq I$ taki, że obcięcie $f \upharpoonright J$ jest funkcją ciągłą. Prowadzi to do konkluzji, że dziedzinę I można przedstawić w postaci rozłącznej sumy pewnego zbioru skończongo oraz definiowalnych otwartych zbiorów wypukłych $J_1, \ldots, J_k$ takich, że wszystkie obcięcia $f \upharpoonright J_i$ $(1 \leq i \leq k)$ są ciągłe. W odróżnieniu od sytuacji o-minimalnej, na ogół nie da się wybrać zbiorów $J_1, \ldots, J_k$ tak, aby funkcja f na każdym z nich była ściśle monotoniczna lub stała. Może się na przykład zdarzyć że funkcja definiowalna jednej zmiennej jest lokalnie stała, ale nie jest kawałkami stała.

Przy badaniu własności zbiorów definiowalnych w strukturach słabo o-minimalnych ważną rolę odgrywają pewne funkcje o wartościach w uzupełnieniu uniwersum (wraz z punktami w nieskończoności), które będziemy nazywali definiowalnymi. Dokładniej, jeśli $X \subseteq M^m$ jest zbiorem definiowalnym w $\mathcal{M}$ (nad $A \subseteq M$), to funkcję $f : X \longrightarrow \overline{M}^{\mathcal{M}} \cup \{+\infty, -\infty\}$ nazywamy definiowalną w $\mathcal{M}$ (nad A) gdy zbiór $\{\langle \overline{x}, y\rangle \in X \times M : y < f(\overline{x})\}$ jest definiowalny w $\mathcal{M}$ (nad A). Jeśli $I \subseteq M$ jest nieskończonym zbiorem definiowalnym w $\mathcal{M}$ nad A, zaś $f : I \longrightarrow \overline{M}^{\mathcal{M}}$ fukcją definiowalną w $\mathcal{M}$ nad A, to dziedzinę I można przedstawić jako rozłączną sumę zbioru skończonego oraz A-definiowalnych otwartych zbiorów wypukłych $J_1, \ldots, J_k$ tak, aby dla każdego $i \in \{1, \ldots, k\}$, obcięcie $f \upharpoonright J_i$ było lokalnie stałe, lokalnie rosnące lub lokalnie malejące [Ar]. W ogólnym przypadku nie jest możliwe wybranie zbiorów $I_1, \ldots, I_k$ w taki sposób, by wszystkie ograniczenia $f \upharpoonright I_i$ były ciągłe. Możliwa jest np. sytuacja, gdy funkcja $f : I \longrightarrow \overline{M}^{\mathcal{M}}$, definiowalna w $\mathcal{M}$, nie jest ciągła w żadnym punkcie swojej dziedziny.

Mówimy, że struktura słabo o-minimalna $\mathcal{M} = (M, \leq, \ldots)$ ma własność silnej monotoniczności, jeśli dla dowolnej funkcji $f : I \longrightarrow \overline{M}^{\mathcal{M}}$ (gdzie $I \subseteq M$ jest nieskończonym zbiorem definiowalnym) definiowalnej w $\mathcal{M}$, dziedzina I jest rozłączną sumą otwartych zbiorów wypukłych $I_1, \ldots, I_k$ oraz zbioru skończonego X takich, że każde z obcięć $f \upharpoonright I_i$ jest funkcją ciągłą, a przy tym ściśle monotoniczną lub stałą. Nietrudno wykazać, że warunek ciągłości w powyższej definicji można zastąpić warunkiem mówiącym, obcięcia $f \upharpoonright I_i$ mają ciągłe przedłużenia do funkcji $f_i : \overline{I_i}^{\mathcal{M}} \longrightarrow \overline{M}^{\mathcal{M}}$. Oczywiście struktury o-minimalne mają własność silnej monotoniczności.

Dla nieskończonego zbioru definiowalnego $X \subseteq M^m$ wprowadzamy pojęcie wymiaru topologicznego poprzez warunek: $\dim(X) \geq k$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje rzutowanie $\pi : M^m \longrightarrow M^k$ takie, że obraz $\pi[X]$ zawiera otwartą kostkę, tj. zbiór postaci $I_1 \times \ldots \times I_k$, gdzie $I_1, \ldots, I_k$ są ograniczonymi przedziałami otwartymi. Przyjmujemy też, że wymiar niepustego zbioru skończonego wynosi 0, zaś zbioru pustego $-\infty$. Dla zbiorów definiowalnych $X, Y \subseteq M^m$ przyjmujemy, że X jest duży w Y, jeśli $\dim(Y \setminus X) < \dim(Y)$. Z prac [MMS] oraz [Ar] wynika, że jeśli $X, Y \subseteq M^m$ są zbiorami definiowalnymi w strukturze słabo o-miniamlnej $\mathcal{M}$, to $\dim(X \cup Y) = \max\{\dim(X), \dim(Y)\}$. Nietrudno też wykazać, że $dim(X \times Z) = \dim(X) + \dim(Z)$ dla zbiorów definiowalnych $X \subseteq M^m$ oraz $Z \subseteq M^n$. Wymiar topologiczny zbiorów definiowalnych w strukturach słabo o-minimalnych na ogół nie posiada własności addytywności, to znaczy dla zbioru definiowalnego $S \subseteq M^{m+n}$ oraz rzutowania $\pi : M^{m+n} \longrightarrow M^m$ (na pierwszych m współrzędnych) możliwa jest sytuacja, kiedy dowolne cięcie pionowe $S_{\overline{a}}$ (gdzie $\overline{a} \in \pi[S]$) ma ustalony wymiar k, ale $\dim(S) < k + \dim(\pi[S])$.

Niech $\mathcal{M} = (M, \leq, \ldots)$ będzie strukturą słabo o-minimalną. Idukcyjnie definiujemy pojęcie komórki w M^m dla $m \in \mathbb{N}_+$ [MMS]. Zbiór $C \subseteq M$ nazywamy komórką, jeśli $|C| = 1$ lub C jest otwartym, niepustym zbiorem wypukłym definiowalnym w $\mathcal{M}$. Przypuśćmy, że zdefiniowaliśmy już pojęcie komórki w M^m. Niech $X \subseteq M^m$ będzie komórką. Wtedy komórkami w M^{m+1} są zbiory postaci $\Gamma(f)$, gdzie $f : X \longrightarrow M$ jest definiowalną funkcją ciągłą lub zbiory postaci

$$(f,g)_X := \{\langle \overline{x}, y\rangle \in X \times M : f(\overline{x}) < y < g(\overline{x})\}, \text{gdzie} f < g \text{ oraz}$$

(1) $f = -\infty$ lub $f : X \longrightarrow \overline{M}^{\mathcal{M}}$ jest definiowalna w $\mathcal{M}$, (2) $g = +\infty$ lub $g : X \longrightarrow \overline{M}^{\mathcal{M}}$ jest definiowalna w $\mathcal{M}$. Jeśli $Th(\mathcal{M})$ jest słabo o-minimalna, to w $\mathcal{M}$ zachodzi wariant twierdzenia o rozkładzie komórkowym [MMS], mianowicie, jeśli $X_1, \ldots, X_k \subseteq M^m$ są zbiorami definiowalnymi nad A, to istnieje rozkład komórkowy zbioru M^m definiowalny nad A, który dzieli każdy ze zbiorów $X_1, \ldots, X_k$. Implikuje to w szczególności, że M^m jest rozłączną sumą skończenie wielu komórek definiowalnych nad A, z których każda jest zawarta w pewnym atomie ciała zbiorów generowanego przez rodzinę $\{X_1, \ldots, X_k\}$. Nie jest możliwe wzmocnienie tego wyniku tak, aby wszystkie komórki występujące w rozkładzie dzielącym zbiory $X_1, \ldots, X_k$ były skonstruowane tylko przy pomocy funkcji ciągłych (jak to ma miejsce w sytuacji o-minimalnej).

Grupa uporządkowana, którą można wzbogacić do struktury słabo o-minimalnej jest abelowa i podzielna. Ciało uporządkowane posiadające słabo o-minimalne wzbogacenie jest rzeczywiście domknięte. Dowód tego ostatniego faktu jest znacznie trudniejszy aniżeli dowód jego o-minimalnego odpowiednika i wymaga zastosowania pewnych faktów z teorii waluacji.

Przypuśćmy teraz, że $\mathcal{M} = (M, \leq, +, \ldots)$ jest słabo o-minimalnym wzbogaceniem grupy uporządkowanej. Mówimy, że przekrój Dedekinda $\langle C, D\rangle$ porządku $(M, \leq)$ jest niewaluacyjny, gdy spełnia warunek

$$\inf\{y - x : x \in C, y \in D\} = 0.$$

Jeżeli wszystkie przekroje Dedekinda porządku $(M, \leq)$ definiowalne w $\mathcal{M}$ są niewaluacyjne, to $\mathcal{M}$ nazywamy struktrą niewaluacyjną (lub typu niewaluacyjnego). Pojęcia te zostały wprowadzone w pracy [MMS] dla słabo o-minimalnych wzbogaceń ciał uporządkowanych, jednak w oczywisty sposób uogólniają się one na wzbogacenia grup uporządkowanych. Nazwę uzasadnia nietrudny do wykazania fakt mówiący, że słabo o-minimalne wzbogacenie $\mathcal{M}$ ciała uporządkowanego $(R, \leq, +, \cdot)$ jest typu niewaluacyjnego dokładnie wtedy, kiedy R nie posiada żadnej nietrywialnej waluacji definiowalnej w $\mathcal{M}$. W pracy [MMS] pokazano też, że dla słabo o-minimalnych wzbogaceń ciał uporządkowanych typu niewaluacyjnego istnieje tzw. silny rozkład komórkowy. Oznacza to, że zbiory definiowalne w takich strukturach zbudowane są ze skończenie wielu silnych komórek skonstruowanych w sposób analogiczny do konstrukcji komórek w strukturach o-minimalnych (precyzyjna definicja przy opisie pracy [1]).

Załóżmy, że $\mathcal{M} = (G, \leq, +, \ldots)$ jest słabo o-minimalnym niewaluacyjnym wzbogaceniem grupy uporządkowanej. Dla $\overline{a} = \langle a_1, \ldots, a_n\rangle \in G^n$ definiujemy $|\overline{a}| = |a_1| + \ldots + |a_n|$. Dla zbiorów definiowalnych $X, Y \subseteq G^n$ ponadto przyjmujemy $\operatorname{dist}(X, Y) = \inf\{|\overline{a} - \overline{b}| : \overline{a} \in X, \overline{b} \in Y\}$ (jest to element $\overline{G}^{\mathcal{M}}$). Działanie $+$ można w naturalny sposób rozszerzyć do uzupełnienia $\overline{G}^{\mathcal{M}}$ przyjmując, że

$$\langle C, D\rangle + \langle C', D'\rangle = \langle C + D, C' + D'\rangle.$$

Niewaluacyjność struktury gwarantuje, że takie działanie jest dobrze określone, zaś $(\overline{G}^{\mathcal{M}}, \leq, +)$ jest uporządkowaną podzielną grupą abelową. Podobnie, jeśli $\mathcal{M} = (R, \leq, +, \cdot, \ldots)$ jest słabo o-minimalnym niewaluacyjnym wzbogaceniem ciała uporządkowanego, to rozszerzając działanie $+$ do uzupełnienia $\overline{R}^{\mathcal{M}}$ jak wyżej oraz definiując mnożenie w $\overline{R}^{\mathcal{M}}$ tak jak w konstrukcji liczb rzeczywistych przy pomocy przekrojów Dedekinda liczb wymiernych, dostajemy ciało rzeczywiście domknięte $(\overline{R}^{\mathcal{M}}, \leq, +, \cdot)$.

C) Opis wyników rozprawy

Generalnym celem rozprawy habilitacyjnej było badanie własności zbiorów i funkcji definiowalnych w strukturach słabo o-minimalnych, zarówno w pełnej ogólności jak też w różnych ważnych szczególnych przypadkach.

W pracach [1] i [2] główny nacisk został położony na słabo o-minimalne wzbogacenia grup uporządkowanych typu niewaluacyjnego. Praca [1] m.in. uogólnia fundamentalne twierdzenie o silnym rozkładzie komórkowym, udowodnione wcześniej przez D. Macphersona, D. Markera i C. Steinhorna [MMS] dla przypadku wzbogaceń ciał rzeczywiście domkniętych. W [1] wprowadzone zostało też pojęcie struktury słabo o-minimalnej z silnym rozkładem komórkowym. Dla modeli tego typu podana została konstrukcja pewnego kanonicznego o-minimalnego rozszerzenia, blisko związanego z wyjściową strukturą słabo o-minimlaną.

Praca [2] dotyczy wzbogaceń struktur słabo o-minimalnych typu niewaluacyjnego przez pewne szczególne predykaty unarne, zwane niewaluacyjnymi. Udowodnione w niej zostało twierdzenie mówiące o zachowywaniu niewaluacyjności przy przechodzeniu od struktury typu niewaluacyjnego do jej wzbogacenia o predykaty niewaluacyjne.

Praca [3] zawiera interesujące zastosowanie wyników prac [1] i [2] w połączeniu z dychotomią Millera [Mi1, Mi2] oraz pewnymi faktami z teorii przestępności. Głównym rezulatem jest tutaj twierdzenie ograniczające klasę funkcji jednej zmiennej możliwych do zdefiniowania w słabo o-minimalnych niewaluacyjnych wzbogaceniach ciał uporządkowanch skończonego stopnia przestępnego nad $\mathbb{Q}$. Pokazano, że w języku takiej struktury nie można określić funkcji, która w nieskończoności przyjmowałaby wartości większe od dowolnej danej funkcji potęgowej. W szczególności oznacza to, że dowolne słabo o-minimalne wzbogacenie ciała liczb rzeczywistych algebraicznych jest strukturą wielomianowo ograniczoną.

Praca [4] napisana została w nieco innym duchu niż prace [1], [2] i [3]. Rozważane są w niej zbiory definiowalne w ogólnych strukturach słabo o-minimalnych, bez żadnych dodatkowych założeń. Głównym celem pracy jest badanie własności topologicznych zbiorów definiowalnych, zwłaszcza rozwinięcie teorii wymiaru topologicznego w tym ogólnym kontekście. W przypadku struktur o-minimalnych czy nawet modeli teorii słabo o-minimalnych, podstawowym narzędziem służącym do badania własności pojęcia wymiaru topologicznego są rozkłady komórkowe. Jednak w klasie wszystkich struktur słabo o-minimalnych nie jest możliwy rozkład zbioru definiowalnego na skończoną liczbę podzbiorów o strukturze na tyle prostej, by dało się łatwo uogólnić typowe rozumowania stosowane w kontekście o-minimalnym. Ponadto łatwo skonstruować przykłady struktur słabo o-minimalnych, w których wymiar topologiczny pozbawiony jest własności addytywności. Dlatego też bardziej zaawansowane rozważania dotyczące wymiaru wymagają rozwinięcia nowych technik, nie odwołujących się do rozkładów komórkowych.

Niektóre z wyników pracy [4] zostały zastosowane do badania grup definiowalnych w strukturach słabo o-minimalnych (praca [10], nie wchodząca w skład rozprawy).

Praca [1]

Najważniejszym wynikiem dwóch pierwszych rozdziałów pracy [1] jest twierdzenie o silnym rozkładzie komórkowym dla słabo o-minimalnych niewaluacyjnych wzbogaceń grup uporządkowanych. Jako że w dowodzie analogicznego twierdzenia dla niewaluacyjnych wzbogaceń ciał rzeczywiście domkniętych [MMS] w istotny sposób używa się własności mnożenia, dowód w naszym ogólniejszym kontekście wymaga rozwinięcia nowych metod, nie odwołujących się do struktury ciała uporządkowanego.

Nietrudno zauważyć, że prawdziwy jest następujący fakt [1, lemat 1.5].

Fakt 1 *Niech $\mathcal{M} = (M, \leq, +, \cdot)$ będzie słabo o-minimalnym wzbogaceniem grupy uporządkowanej. Następujące warunki są równoważne.*

(1) $\mathcal{M}$ jest typu niewaluacyjnego.

(2) Jedynymi podgrupami $(M, +)$ definiowalnymi w $\mathcal{M}$ są $\{0\}$ oraz M.

(3) $\mathcal{M}$ ma własność silnej monotoniczności.

(4) Dowolna relacja równoważności na M definiowalna w $\mathcal{M}$ ma skończenie wiele nieskończonych klas.

(Równoważność (3) i (4) w powyższym fakcie nie wymaga zakładania, że $\mathcal{M}$ jest wzbogaceniem grupy uporządkowanej)

W pracy [1] rozważamy pojęcie silnej komórki zdefiniowane indukcyjnie jak niżej. Jednocześnie określamy też uzupełnienia silnych komórek. Uzupełnienie C (zależne od struktury $\mathcal{M}$) oznaczamy dla uproszczenia przez $\overline{C}$.

Niech $\mathcal{M} = (M, \leq, \ldots)$ będzie strukturą słabo o-minimalną.

(1) Jednoelementowy podzbiór uniwersum M nazywamy silną $\langle 0 \rangle$-komórką. Jeśli $C \subseteq M$ jest silną $\langle 0 \rangle$-komórką, to przyjmujemy $\overline{C} := C$.

(2) Niepusty wypukły podzbiór M definiowalny w $\mathcal{M}$ nazywamy silną $\langle 1 \rangle$-komórką w M. Dla silnej $\langle 1 \rangle$-komórki $C \subseteq M$ przyjmujemy $\overline{C} := \{x \in \overline{M}^{\mathcal{M}} : (\exists a, b \in C)(a < x < b)\}$.

Niech teraz $m \in \mathbb{N}_+$, $i_1, \ldots, i_m \in \{0, 1\}$ i przypuśćmy, że zdefiniowaliśmy już silne $\langle i_1, \ldots, i_m \rangle$-komórki w M^m oraz ich uzupełnienia w $(\overline{M}^{\mathcal{M}})^m$.

(3) Jeśli $C \subseteq M^m$ jest silną $\langle i_1, \ldots, i_m \rangle$-komórką zawartą w M^m zaś $f : C \longrightarrow M$ funkcją definiowalną w $\mathcal{M}$ mającą (jedyne) ciągłe rozszerzenie $\overline{f} : \overline{C} \longrightarrow \overline{M}^{\mathcal{M}}$, to $\Gamma(f)$ (wykres f) jest silną $\langle i_1, \ldots, i_m, 0 \rangle$-komórką zawartą w M^{m+1}. Uzupełnienie $\Gamma(f)$ definiujemy jako $\Gamma(\overline{f})$.

(4) Jeśli $C \subseteq M^m$ jest silną $\langle i_1, \ldots, i_m \rangle$-komórką zawartą w M^m zaś $f, g : C \longrightarrow \overline{M}^{\mathcal{M}} \cup \{-\infty, +\infty\}$ funkcjami definiowalnymi w $\mathcal{M}$ posiadającymi ciągłe rozszerzenia $\overline{f}, \overline{g} : \overline{C} \longrightarrow \overline{M}^{\mathcal{M}} \cup \{-\infty, +\infty\}$ (tzn. f, g są funkcjami silnie ciągłymi) i spełniającymi warunki:

(a) $\overline{f}(\overline{x}) < \overline{g}(\overline{x})$ dla $\overline{x} \in \overline{C}$;

(b) wartości każdej z funkcji f, g należą do jednego ze zbiorów: $\{-\infty\}, M, \overline{M}^{\mathcal{M}} \setminus M, \{+\infty\}$;

to zbiór

$$(f, g)_C := \{\langle \overline{a}, b \rangle \in C \times M : f(\overline{a}) < b < g(\overline{a})\} \subseteq M^{m+1}$$

nazywamy silną $\langle i_1, \ldots, i_m, 1 \rangle$-komórką in M^m. Uzupełnienie $(f, g)_C$ definiujemy jako

$$\overline{(f, g)_C} := (\overline{f}, \overline{g})_{\overline{C}} := \{\langle \overline{a}, b \rangle \in \overline{C} \times \overline{M}^{\mathcal{M}} : \overline{f}(\overline{a}) < b < \overline{g}(\overline{a})\}.$$

(5) Mówimy, że $C \subseteq M^m$ jest silną komórką, jeśli C jest silną $\langle i_1, \ldots, i_m \rangle$-komórką dla pewnych $i_1, \ldots, i_m \in \{0, 1\}$.

Dowolny podział uniwersum M na skończenie wiele silnych komórek nazywamy silnym rozkładem komórkowym M. Niech $m \in \mathbb{N}_+$ i niech $\pi : M^{m+1} \longrightarrow M^m$ oznacza rzutowanie na pierwszych m współrzędnych. Skończony podział $\mathcal{C}$ zbioru M^{m+1} na silne komórki nazywamy silnym rozkładem komórkowym M^{m+1}, jeśli $\pi[\mathcal{C}] := \{\pi[C] : C \in \mathcal{C}\}$ jest silnym rozkładem komórkowym M^m. Mówimy, że silny rokład komórkowy $\mathcal{C}$ zbioru M^m jest definiowalny nad $A \subseteq M$, jeśli wszystkie jego elementy są definiowalne nad A. Mówimy, że $\mathcal{C}$ dzieli zbiór $X \subseteq M^m$, jeśli dla dowolnego $C \in \mathcal{C}$, albo $C \subseteq X$ albo $C \cap X = \emptyset$.

Definicja 2 *Struktura słabo o-minimalna $\mathcal{M} = (M, \leq, \ldots)$ ma własność silnego rozkładu komórkowego, jeśli dla dowolnych $m, k \in \mathbb{N}_+$ oraz $A \subseteq M$, jeśli $X_1, \ldots, X_k \subseteq M^m$ są zbiorami definiowalnymi nad A, to istnieje A-definiowalny silny rozkład komórkowy $\mathcal{C}$ zbioru M^m dzielący każdy ze zbiorów $X_1, \ldots, X_k$.*

Powyższa definicja silnych komórek oraz silnego rozkładu komórkowego nieco różni się od definicji podanych w [MMS] (tzn. silna komórka w sensie pracy [1] jest silną komórką w sensie [MMS] lecz niekoniecznie na odwrót). Jednak nietrudno wykazać, że pojęcie własności silnego rozkładu komórkowego wprowadzone w pracy [1] jest równoważne analogicznemu pojęciu zdefiniowanemu w oparciu o silne rozkłady komórkowe w sensie [MMS].

Głównym wynikiem rozdziału 2 pracy [1] jest następujące twierdzenie [1, lemat 2.6 i wniosek 2.16].

Twierdzenie 3 *Niech $\mathcal{M} = (M, \leq, +, \ldots)$ będzie słabo o-minimalnym wzbogaceniem grupy uporządkowanej. Wówczas $\mathcal{M}$ jest typu niewaluacyjnego wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{M}$ ma własność silnego rozkładu komórkowego.*

To, że niewaluacyjność struktury $\mathcal{M}$ będącej wzbogaceniem grupy uporządkowanej jest konsekwencją własności silnego rozkładu komórkowego, pokazuje się dość łatwo. Dowód implikacji w przeciwną stroną wymaga przeprowadzenia skomplikowanego rozumowania indukcyjnego (względem wymiaru), w którym jednocześnie dowodzi się pięciu warunków. Rozumowanie to zawarte jest w dowodzie poniższego twierdzenia [1, twierdzenie 2.15] (L to język struktury $\mathcal{M}$).

Twierdzenie 4 *Załóżmy, że $\mathcal{M} = (M, \leq, +, \ldots)$ jest słabo o-minimalnym niewaluacyjnym wzbogaceniem grupy uporządkowanej $(M, \leq, +)$, $A \subseteq M$ oraz $m \in \mathbb{N}_+$.*

(a)$_m$ Jeśli $k \in \mathbb{N}_+$ i $X_1, \ldots, X_k \subseteq M^m$ są zbiorami definiowalnymi nad A, to istnieje A-definiowalny silny rozkład komórkowy M^m dzielący każdy ze zbiorów $X_1, \ldots, X_k$.

(b)$_m$ Załóżmy, że $U \subseteq M^m$ jest niepustym otwartym zbiorem A-definiowalnym zaś $\varphi(\overline{x}, y)$, gdzie $|\overline{x}| = m$, jest $L(A)$-formułą spełniającą warunki:

- *$\varphi(M, d)$ dla $d > 0$ jest otwartym podzbiorem U;*
- *$\varphi(M, d_2) \subseteq \varphi(M, d_1)$ gdy $0 < d_1 \leq d_2$;*
- *$\bigcup_{d>0} \varphi(M, d) = U$.*

Wówczas istnieje podział zbioru $\mathcal{D}$ zbioru U na silne komórki definiowalne nad A taki, że dla dowolnej komórki otwartej $D \in \mathcal{D}$, jeżeli $B \subseteq D$ jest kostką otwartą spełniającą warunek $\operatorname{dist}(B, M^m \setminus D) > 0$, to $B \subseteq \varphi(M, d)$ dla pewnego $d > 0$.

(c)$_m$ Jeśli $X \subseteq M^m$ jest niepustym zbiorem definiowalnym nad A zaś $f : X \longrightarrow \overline{M}^{\mathcal{M}}$ funkcją definiowalną nad A, to istnieje podział zbioru X na silne komórki definiowalne nad A taki, że dla dowolnego $D \in \mathcal{D}$, $f \restriction D$ jest silnie ciągła.

(d)$_m$ Jeśli $X \subseteq M^m$ jest niepustym zbiorem definiowalnym zaś $E(x, y, \overline{z})$ jest $L(M)$-formułą taką, że $|\overline{z}| = m$ oraz dla dowolnego $\overline{a} \in X$, $E(x, y, \overline{a})$ definiuje w M relację równoważności o skończenie wielu klasach, to istnieje $n \in \mathbb{N}_+$ takie, że dla dowolnego $\overline{a} \in X$, relacja równoważności zdefiniowana przez $E(x, y, \overline{a})$ posiada co najwyżej n klas równoważności.

(e)$_m$ Jeśli $X \subseteq M^{m+1}$ jest zbiorem definiowalnym, to istnieje liczba $n \in \mathbb{N}_+$ taka, że dla dowolnego $\overline{a} \in M^m$, zbiór $\{b \in M : \langle \overline{a}, b \rangle \in X\}$ posiada co najwyżej n składowych wypukłych.

Struktury słabo o-minimalne z własnością silnego rozkładu komórkowego posiadają szereg cech struktur o-minimalnych. Na przykład wymiar topologiczny zbiorów definiowalnych jest dla tej klasy funkcją wymiaru w sensie [vdD1]. Rozdział 3 pracy [1] pokazuje, że z każdą strukturą słabo o-minimalną z własnością silnego rozkładu komórkowego w istocie blisko związana jest pewna struktura o-minimalna.

Twierdzenie 5 *Niech $\mathcal{M} = (M, \leq, \ldots)$ będzie strukturą słabo o-minimalną z własnością silnego rozkładu komórkowego. Wówczas istnieje struktura o-minimalna $\overline{\mathcal{M}}$ będąca wzbogaceniem porządku $(\overline{M}^{\mathcal{M}}, \leq)$ spełniająca dla dowolnego $m \in \mathbb{N}_+$ następujące warunki.*

(a) Jeśli $C \subseteq M^m$ jest silną komórką definiowalną w $\mathcal{M}$, to uzupełnienie C jest zbiorem definiowalnym w $\overline{\mathcal{M}}$.

(b) Dowolny zbiór $X \subseteq (\overline{M}^{\mathcal{M}})^m$ definiowalny w $\overline{\mathcal{M}}$ jest skończoną boolowską kombinacją uzupełnień silnych komórek.

(c) Jeśli $X \subseteq (\overline{M}^{\mathcal{M}})^m$ jest zbiorem definiowalnym w $\overline{\mathcal{M}}$, to przekrój $X \cap M^m$ jest zbiorem definiowalnym w $\mathcal{M}$.

W dowodzie twierdzenia 5 dla $m \in \mathbb{N}_+$ definiujemy rodziny $D_m \subseteq P((\overline{M}^{\mathcal{M}})^m)$, których elementy są skończonymi sumami pewnych zbiorów skonstruowanych podobnie jak komórki w strukturach o-minimalnych, za pomocą uzupełnień silnych komórek oraz funkcji silnie ciągłych. W rzeczywistości dowolny zbiór należący do D_m jest skończoną boolowską kombincją uzupełnień silnych komórek w M^m definiowalnych w $\mathcal{M}$.

Okazuje się, że rodziny D_m, $m \in \mathbb{N}_+$, spełniają następujące warunki:

(a) $(D_m, \cap, \cup, ^c, \emptyset, M^m)$ jest algebrą Boole'a.

(b) Jeżeli $X \in D_m$, to $X \times \overline{M}^{\mathcal{M}}, \overline{M}^{\mathcal{M}} \times X \in D_{m+1}$.

(c) Jeżeli $1 \leq i \leq j \leq m$, to $X_m^{i,j} := \{\langle x_1, \ldots, x_m \rangle \in (\overline{M}^{\overline{M}})^m : x_i = x_j\} \in D_m$.

(d) Jeżeli $X \in D_{m+1}$ i $\pi : (\overline{M}^{\mathcal{M}})^{m+1} \longrightarrow (\overline{M}^{\mathcal{M}})^m$ jest rzutowaniem na pierwszych m współrzędnych, to $\pi[X] \in D_m$.

(e) $\{\langle x, y\rangle \in (\overline{M}^{\mathcal{M}})^2 : x < y\} \in D_2$.

(f) $D_1 = \{X \subseteq \overline{M}^{\mathcal{M}} : X$ jest skończoną sumą przedziałów w $(\overline{M}^{\mathcal{M}}, \leq)\}$.

Z warunków tych łatwo wynika, że istnieje struktura o-minimalna $\overline{\mathcal{M}} = (\overline{M}^{\mathcal{M}}, \leq, \ldots)$ taka, że dla dowolnego $m \in \mathbb{N}_+$, zbiór $X \subseteq (\overline{M}^{\mathcal{M}})^m$ jest definiowalny w $\overline{\mathcal{M}}$ dokładnie wtedy, kiedy $X \in D_m$.

Strukturę $\overline{\mathcal{M}}$ z twierdzenia 5 nazywamy kanonicznym o-minimalnym rozszerzeniem $\mathcal{M}$. Łatwo zauważyć, że jeśli $\mathcal{M} = (G, \leq, +, \ldots)$ jest słabo o-minimalnym niewaluacyjnym wzbogaceniem grupy uporządkowanej $(G, \leq, +)$, to $\overline{\mathcal{M}}$ jest o-minimalnym wzbogaceniem grupy uporządkowanej (abelowej i podzielnej) $(\overline{G}^{\mathcal{M}}, \leq, +)$. Podobnie, jeśli $\mathcal{M} = (R, \leq, +, \cdot, \ldots)$ jest słabo o-minimalnym niewaluacyjnym wzbogaceniem ciała uporządkowanego $(R, \leq, +, \cdot)$, to $\overline{\mathcal{M}}$ jest o-minimalnym wzbogaceniem ciała rzeczywiście domkniętego $(\overline{R}^{\mathcal{M}}, \leq, +, \cdot)$.

Dla zbioru $X \subseteq \mathcal{M}^m$ definiowalnego w strukturze o-minimalnej $(M, \leq, \ldots)$ rozważa się pojęcie charakterystyki Eulera określone jako suma liczb postaci $(-1)^{dim(C)}$, przy czym sumowanie przebiega wszystkie komórki $C \subseteq X$ należące do pewnego ustalonego rozkładu komórkowego przestrzeni M^m dzielącego X. Tak wprowadzona charakterystyka Eulera nie zależy od rozkładu komórkowego i posiada szereg cech klasycznej charakterystyki Eulera.

Okazuje się jednak, że analogiczna definicja w przypadku modeli teorii słabo o-minimalnych (gdzie mamy wariant rozkładu komórkowego) zwykle prowadzi do pojęcia, które zależy od rozkładu komórkowego.

W rozdziale 4 pracy [1] dla struktur słabo o-minimalnych z własnością silnego rozkładu komórkowego wprowadzone zostało pojęcie charakterystyki Eulera χ zbioru definiowalnego, o wartościach w pierścieniu $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$. Zgadza się ono z pojęciem charakterystyki Eulera rozważanym w przypadku o-minimalnym. Głównym wynikiem rozdziału 4 jest niezależność χ od rozkładu komórkowego [1, Lemat 4.1]. Nietrudno też zauważyć (naśladując standardowe dowody z [vdD2]), że zachodzi następujący fakt [1, twierdzenie 4.2].

Twierdzenie 6 *Niech $\mathcal{M} = (M, \leq, \ldots)$ będzie strukturą słabo o-minimalną mającą silny rozkład komórkowy i niech $m, n \in \mathbb{N}_+$.*

(a) Jeśli $X, Y \subseteq M^m$ są zbiorami definiowalnymi, to $\chi(X \cup Y) = \chi(X) + \chi(Y) - \chi(X \cap Y)$.

(b) Jeśli $S \subseteq M^{m+n}$ jest zbiorem definiowalnym i $k \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right]$, to zbiór $X := \{\overline{a} \in M^m : \chi(S_{\overline{a}}) = k\}$ jest definiowalny i $\chi(\bigcup\limits_{\overline{a} \in X} \{\overline{a}\} \times S_{\overline{a}}) = \chi(X) \cdot k$.

(c) Jeśli $X \subseteq M^m$ i $Y \subseteq M^n$ są zbiorami definiowalnymi, to $\chi(X \times Y) = \chi(X) \cdot \chi(Y)$.

Przykłady zamieszczone przy końcu rozdziału 4 pokazują, że:

(a) charakterystyka Eulera (w sensie zdefiniowanym w pracy [1]) nie zawsze jest zachowywana przez definiowalne funkcje różnowartościowe;

(b) równość wymiarów i charakterystyk Eulera dla zbiorów definiowalnych w słabo o-minimalnych niewaluacyjnych wzbogaceniach ciała rzeczywiście domkniętego nie gwarantuje istnienia definiowalnej bijekcji między nimi.

Tak więc nie można się spodziewać, że pierścień Grothendiecka (w sensie pracy [KS]) dla słabo o-minimalnego niewaluacyjnego wzbogacenia ciała rzeczywiście domkniętego jest izomorficzny z $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ (klasyczne wyniki dotyczące wymiaru i charakterystyki Eulera dla zbiorów definiowalnych w o-minimanych wzbogaceniach ciał rzeczywiście domkniętych pokazują, że pierścień Grothendiecka dla takiej struktury jest zawsze izomorficzny z $\mathbb{Z}$).

Praca [2]

Wyniki prac [BP] oraz [Bz], dotyczące wzbogacania struktur o-minimalnych oraz modeli teorii o-minimalnych o predykaty wypukłe, doprowadziły mnie do zadania pytania, czy dodanie do struktury słabo o-minimalnej będącej niewaluacyjnym wzbogaceniem grupy uporządkowanej rodziny predykatów niewaluacyjnych (tzn. wyznaczających niewaluacyjne przekroje Dedekinda) prowadzi do powstania słabo o-minimalnej struktury typu niewaluacyjnego. Praca [2] daje pozytywną odpowiedź na postawione pytanie.

Niech $\mathcal{M} = (M, \leq, +, \ldots)$ będzie słabo o-minimalnym wzbogaceniem grupy uporządkowanej i niech $X \subseteq M$ będzie sumą skończenie wielu zbiorów wypukłych. Dla $a \in M$, niech $R(a, X)$ oznacza składową wypukłą zbioru X lub $M \setminus X$ zawierającą a, w zależności od tego, czy $a \in X$ czy $a \notin X$. Dla $a \in M$ definiujemy

$$D(a, X) = \bigcup_{\alpha \in R(a,X)} (\alpha, +\infty).$$

Jest jasne, że jeśli $D(a, X) \neq M$, to $\langle M \setminus D(a, X), D(a, X)\rangle$ jest przekrojem Dedekinda porządku $(M, \leq)$. Przekroje tej postaci nazywamy przekrojami wyznaczonymi przez X.

Mówimy, że $X \subseteq M$ jest predykatem niewaluacyjnym, jeśli X jest sumą skończenie wielu zbiorów wypukłych i wszystkie przekroje Dedekinda wyznaczone przez X są niewaluacyjne.

Głównym wynikiem pracy [2] jest następujące twierdzenie [2, twierdzenie 2.11].

Twierdzenie 7 *Jeśli $\mathcal{M} = (M, \leq, +, \ldots)$ jest słabo o-minimalnym niewaluacyjnym wzbogaceniem grupy uporządkowanej zaś $\{P_i : i \in I\}$ rodziną predykatów niewaluacyjnych, to wzbogacenie $\mathcal{N} := (\mathcal{M}, (P_i)_{i\in I})$ jest niewaluacyjnym modelem teorii słabo o-minimalnej.*

To, że teoria wzbogacenia $(\mathcal{M}, (P_i)_{i\in I})$ jest słabo o-minimalna wynika z własności silnego rozkładu komórkowego dla $\mathcal{M}$ udowodnionej w [1] oraz z twierdzenia Baizhanova [Bz]. Niemniej jednak w pracy [2] podany został alternatywny dowód tego faktu w rozpatrywanym przypadku.

Dowolny zbiór definiowalny w $\mathcal{N}$ można wyznaczyć za pomocą pojedynczej formuły, używającej jedynie skończenie wielu predykatów P_i, wyznaczających łącznie skończenie wiele przekrojów porządku $(M, \leq)$. Zatem przy dowodzeniu niewaluacyjności struktury $\mathcal{N}$ wystarczy ograniczyć się do rozpatrywania wzbogaceń słabo o-minimalnej struktury niewaluacyjnej o pojedynczy predykat wypukły C taki, że $\inf C = -\infty$, wyznaczający tylko jeden przekrój Dedekinda.

Praca [3]

W 1904 roku G. Faber [Fa] skonstruował całkowitą funkcję przestępną $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ o współczynnikach wymiernych a_n taką, że wszystkie wartości f wraz z pochodnymi dowolnego rzędu dla argumentów algebraicznych są liczbami algebraicznymi. Oznacza to niemożność wykrycia przestępności f poprzez badanie jedynie jej wartości oraz pochodnych dla argumentów algebraicznych.

Znacznie dalej posuniętą formą opisanego wyżej zachowania jest konstrukcja A. Wilkiego przestępnej funkcji analitycznej $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, której przestępności nie można wyrazić za pomocą żadnej formuły pierwszego rzędu. Innymi słowy, wzbogacenie uporządkowanego ciała liczb algebgraicznych $\mathcal{R}_{alg} = (\mathbb{R}_{alg}, \leq, +, \cdot)$ przez funkcję $g \restriction \mathbb{R}_{alg}$ jest elementarną podstrukturą struktury $(\mathbb{R}, \leq, +, \cdot, g)$.

Dzięki wynikom J. Denefa oraz L. van den Driesa [DD], konstrukcja Wilkiego daje przykład właściwego o-minimalnego wzbogacenia ciała uporządkowanego $\mathcal{R}_{alg}$. Okazuje się też, że otrzymana struktura jest wielomianowo ograniczona (to znaczy, że dowolna definiowalna funkcja jednej zmiennej, której dziedzina zawiera przedział postaci $(a, +\infty)$ jest w nieskończoności ograniczona przez pewien wielomian). W oparciu o wyniki Ch. Laskowskiego i Ch. Steinhorna [LS] dość łatwo daje się wykazać, że wielomianowa ograniczoność jest cechą dowolnego o-minimalnego wzbogacenia $\mathcal{R}_{alg}$. Celem pracy [3] jest uogólnienie tej obserwacji do klasy słabo o-minimalnych niewaluacyjnych wzbogaceń ciał uporządkowanych o skończonym stopniu przestępnym. Używa się przy tym wyników prac [1] i [2] oraz pewnych rezultatów z zakresu teorii przestępności.

Twierdzenie 8 *([3], twierdzenie 3.3) Jeśli $(K, \leq, +, \cdot)$ jest uporządkowanym podciałem ciała liczb rzeczywistych skończonego stopnia przestępnego nad $\mathbb{Q}$, to dowolne słabo o-minimalne wzbogacenie $(K, \leq, +, \cdot)$ jest wielomianowo ograniczone.*

Szic dowodu. Załóżmy nie wprost, że istnieje struktura słabo o-minimalna $\mathcal{M} = (K, \leq, +, \cdot, \ldots)$ będąca wzbogaceniem $(K, \leq, +, \cdot)$, która nie jest wielomianowo ograniczona. Oczywiście $\mathcal{M}$ jest strukturą niewaluacyjną. Dla liczby (przestępnej) $\alpha \in \mathbb{R} \setminus K$, niech P_α oznacza predykat unarny definiujący zbiór elementów ciała K mniejszych od α. Zgodnie z twierdzeniem Baizhanova [Bz], teoria struktury $\mathcal{N} = (\mathcal{M}, (P_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R} \setminus K})$ jest słabo o-minimalna. $\mathcal{N}$ jest też niewaluacyjna. Kanoniczne o-minimalne rozszerzenie $\overline{\mathcal{N}}$ struktury $\mathcal{N}$ można bez straty ogólności potraktować jako wzbogacenie uporządkowanego ciała liczb rzeczywistych. Jako że struktura $\overline{\mathcal{N}}$ nie jest wielomianowo ograniczona, można w niej zdefiniować funkcję exponencjalną [Mi1]. Implikuje to, wobec wyników pracy [1], że zbiór par $\langle x, y \rangle \in K^2$ takich, że $y < exp(x)$ jest definiowalny w $\mathcal{N}$. Rozważmy zbiory

$$T = \{\langle a, b \rangle \in K^2 : b < 2^a\} \text{ oraz } X = \{a \in K : T_a \text{ ma supremum w } K\}.$$

Nietrudno wykazać, iż są one definiowalne w $\mathcal{N}$. Co więcej, X zawiera zbiór liczb naturalnych. Z twierdzenia G. Diaza udowodnionego w [Di] wynika, że istnieje ciąg liczb rzeczywistych algebraicznych $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ rozbieżny do nieskończoności, którego żaden wyraz nie należy do X. Oznacza to, że X nie może być skończoną sumą zbiorów wypukłych, co przeczy słabej o-minimalności $\mathcal{N}$.

Dowód twierdzenia 8 nieco upraszcza się w sytuacji, gdy przyjmiemy, że ciało K jest równe $\mathbb{R}_{alg}$. Zamiast wspomnianego wyniku G. Diaza wystarcza wówczas użycie twierdzenia Gelfonda-Schneidera. Praca [3] zawiera także wcześniejszą wersję dowodu twierdzenia 8, opartą na hipotezie Schanuela.

Przy badaniu o-minimalnych wzbogaceń ciał rzeczywiście domkniętych rozważa się pojęcie funkcji potęgowej, to znaczy funkcji definiowalnej spełniającej równanie różniczkowe postaci $xy' = ay$, gdzie a jest dodatnim elementem struktury. Pojęcie to ma również sens dla słabo o-minimalnych niewaluacyjnych wzbogaceń ciał uporządkowanych, przy czym wartości funkcji mogą leżeć w uzupełnieniu uniwersum struktury. Funkcją potęgową jest na przykład funkcja postaci $y = ax^n$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, zaś a jest elementem struktury. Jednak w strukturach o-minimalnych (a tym bardziej słabo o-minimalnych) będących wzbogaceniami ciał niearchimedesowych mogą istnieć funkcje potęgowe, które nie są ograniczone przez żaden wielomian. Mówimy, że struktura słabo o-minimalna $\mathcal{M} = (K, \leq, +, \cdot, \ldots)$ będąca wzbogaceniem ciała uporządkowanego $(K, \leq, +, \cdot)$ jest potęgowo ograniczona, jeśli dowolna funkcja jednej zmiennej definiowalna w $\mathcal{M}$, której dziedzina zawiera przedział postaci $(a, +\infty)$ jest w nieskończoności ograniczona przez pewną funkcję potęgową. Twierdzenie Millera o dychotomii z [Mi2] mówi, że w o-minimalnym wzbogaceniu ciała rzeczywiście domkniętego, które nie jest potęgowo ograniczone można zdefiniować funkcję eksponencjalną, to znaczy funkcję będącą rozwiązaniem równania różniczkowego postaci $y' = ay$, gdzie $a > 0$ jest elementem struktury.

Modyfikując nieco dowód twierdzenia 8 i używając wyników prac [1] i [Mi2], uzyskujemy następujące uogólnienie.

Twierdzenie 9 *Niech $(K, \leq, +, \cdot)$ będzie ciałem uporządkowanym skończonego stopnia przestępnego nad $\mathbb{Q}$. Wtedy dowolne słabo o-minimalne niewaluacyjne wzbogacenie $(K, \leq, +, \cdot)$ jest potęgowo ograniczone.*

Praca [3] zawiera również stosunkowo łatwy dowód twierdzenia 9 w przypadku o-minimalnym, używający twierdzenia Lindemanna.

Praca [4]

Jedną z własności wymiaru topologicznego dla zbiorów definiowalnych w strukturach o-minimalnych, dowodzoną standardowo przy pomocy rozkładów komórkowych, jest jego niezmienniczość względem definiowalnych injekcji. Łatwo wynika ona z faktu, iż dla zbioru definiowalnego $X \subseteq M^m$ oraz funkcji definiowalnej $f : X \subseteq M^n$, wymiary X oraz $\Gamma(f)$ są równe.

Ze względu na brak rozkładów komórkowych dla dowolnych struktur słabo o-minimalnych, do badania własności topologicznych zbiorów definiowalnych w tym kontekście konieczne wydaje się rozważanie pewnych ogólniejszych pojęć, które pozwoliłyby opisać istotne (głównie z punktu widzenia teorii wymiaru) cechy topologii zbiorów definiowalnych. W pracy [4] używamy między innymi następującego pojęcia gładkości.

Definicja 10 *Niech $X \subseteq S \subseteq M^m$ będą zbiorami definiowalnymi (w strukturze słabo o-minimalnej $\mathcal{M} = (M, \leq, \ldots)$) wymiaru $k \geq 0$ i niech $\overline{a} \in X$. Mówimy, że X jest gładki w punkcie $\overline{a}$ względem S jeśli $k = 0$ lub $k \geq 1$ i istnieją kostka otwarta $B \subseteq M^m$ zawierająca $\overline{a}$ oraz rzutowanie $\pi : M^m \longrightarrow M^k$ takie, że $B \cap X = B \cap S$, $\pi[B \cap X]$ jest kostką otwartą w M^k i $\pi \restriction B \cap X : B \cap X \longrightarrow \pi[B \cap X]$ jest homeomorfizmem. Mówimy, że X jest lokalnie gładki w S, jeśli dla dowolnego $\overline{a} \in X$, X jest gładki w $\overline{a}$ względem S.*

Najważniejszym wynikiem pracy [4] jest następujące twierdzenie, w którym dowód poszczególnych warunków przebiega przez jednoczesną indukcję względem m. Tutaj $\pi_i^{m+1} : M^{m+1} \longrightarrow M^m$ jest rzutowaniem w kierunku osi o numerze i, zaś $\varrho_i^m : M^m \longrightarrow M$ rzutowaniem na oś o numerze i.

Twierdzenie 11 *([4], twierdzenie 2.11) Niech $\mathcal{M} = (M, \leq, \ldots)$ będzie strukturą słabo o-minimalną i niech $m \in \mathbb{N}_+$.*

(a)$_m$ *Jeśli $S \subseteq M^m$ jest niepustym zbiorem definiowalnym, to* $\dim(\mathrm{cl}(S) \setminus S) < \dim(S)$.

(b)$_m$ *Jeśli $X \subseteq S \subseteq M^m$ są niepustymi zbiorami definiowalnymi i* $\dim(X) = \dim(S)$, *to zbiór $\{\overline{a} \in X : X \text{ jest gładki w } \overline{a} \text{ względem } S\}$ jest duży w X.*

(c)$_m$ Załóżmy, że $S \subseteq M^m$ jest niepustym zbiorem definiowalnym zaś $f : S \longrightarrow M$ jest funkcją definiowalną. Wówczas zbiór punktów ciągłości f jest duży w S.

(d)$_m$ Załóżmy, że $S \subseteq M^m$ jest niepustym zbiorem definiowalnym, $f : S \longrightarrow M$ i $g : S \longrightarrow \overline{M}^{\mathcal{M}}$ są funkcjami definiowalnymi, przy czym f jest ciągła. Jeśli $(\forall \overline{a} \in S)(f(\overline{a}) < g(\overline{a}))$ [odpowiednio: $(\forall \overline{a} \in S)(f(\overline{a}) > g(\overline{a}))$], to istnieje otwarty przedział $I \subseteq M$ oraz zbiór definiowalny $X \subseteq S$ takie, że $\dim(X) = \dim(S)$ i $X \times I \subseteq (f, g)_S$ [odpowiednio: $X \times I \subseteq (g, f)_S$].

(e)$_m$ Jeśli $S \subseteq M^{m+1}$ jest niepustym zbiorem definiowalnym oraz $i \in \{1, \ldots, m+1\}$, to $\dim(S) = \dim(\pi_i^{m+1}[S])$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego przedziału $I \subseteq M$ istnieje zbiór definiowalny $X \subseteq \pi_i^{m+1}[S]$ taki, że $\dim(X) < \dim(\pi_i^{m+1}[S])$ oraz dla dowolnego $k \in \mathbb{N}_+$ i $\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_k \in \pi_i^{m+1}[S] \setminus X$,

$$I \not\subseteq \bigcup_{l=1}^{k} \varrho_i^{m+1}[(\pi_i^{m+1})^{-1}(\overline{a}_l) \cap S].$$

(f)$_m$ Załóżmy, że $S \subseteq M^{m+1}$ jest niepustym zbiorem definiowalnym i $\in \{1, \ldots, m+1\}$ i dla dowolnego $\overline{a} \in \pi_i^{m+1}[S]$, przeciwobraz $(\pi_i^{m+1})^{-1}(\overline{a}) \cap S$ jest skończony. Wtedy $\dim(S) = \dim(\pi_i^{m+1}[S])$.

(g)$_m$ Załóżmy, że $i \in \{1, \ldots, m+1\}$ oraz $X \subseteq S \subseteq M^{m+1}$ są niepustymi zbiorami definiowalnymi. Ponadto załóżmy, że $\pi_i^{m+1}[X] = \pi_i^{m+1}[S]$, $\dim(\pi_i^{m+1}[S]) \geq 1$, i dla każdego $\overline{a} \in \pi_i^{m+1}[S]$, $\varrho_i^{m+1}[(\pi_i^{m+1})^{-1}(\overline{a}) \cap S]$ jest nieskończonym zbiorem wypukłym i $\emptyset \neq (\pi_i^{m+1})^{-1}(\overline{a}) \cap X \subsetneq (\pi_i^{m+1})^{-1}(\overline{a}) \cap S$. Wtedy $\dim(S) = \dim(\pi_i^{m+1}[S]) + 1$.

Z powyższego twierdzenia wyprowadzamy wniosek o zachowywaniu wymiaru topologicznego przez definiowalne injekcje.

Wniosek 12 *([4], twierdzenie 2.14) Niech $\mathcal{M} = (M, \leq, \ldots)$ będzie strukturą słabo o-minimalną. Jeśli $X \subseteq M^m$ jest niepustym zbiorem definiowalnym w $\mathcal{M}$ zaś $f : X \longrightarrow M^n$ funkcją różnowartościową definiowalną w $\mathcal{M}$, to wymiary topologiczne zbiorów X oraz $f[X]$ są równe.*

Zakładając, że wymiar topologiczny jest funkcją wymiaru w sensie [vdD1] (jest tak np. w strukturach o-minimalnych), łatwo wykazać, że dla niepustych zbiorów definiowalnych $X \subseteq M^m$ oraz $Y \subseteq M^n$ spełniony jest następujący warunek:

Jeśli $S \subseteq X \times Y$ jest zbiorem definiowalnym, dużym w $X \times Y$, to zbiór tych $\overline{a} \in X$, dla których cięcie $S_{\overline{a}}$ jest duże w Y, jest duży w X.

Stosunkowo łatwo daje sią skonstruować przykłady struktur słabo o-minimalnych, w których pojęcie wymiaru topologicznego nie spełnia powyższego warunku (ani tym bardziej warunku addytywności) [MMS]. Okazuje się jednak, że dla pojęcia wymiaru topologicznego w strukturach słabo o-minimalnych udowodnić można słabszą wersję addytywności. Jeśli $X \subseteq M^m$ jest niepustym zbiorem definiowalnym, $I \subseteq M$ przedziałem otwartym, zaś $S \subseteq X \times I$ zbiorem definiowalnym, dużym w $X \times I$, to zbiór tych par $\langle \overline{a}, \overline{b} \rangle \in X^2$, dla których $S_{\overline{a}} \cup S_{\overline{b}}$ jest koskończony w I, jest duży w X^2. W trzecim rozdziale pracy [4] udowodnione zostało następujące uogólnienie tej obserwacji.

Twierdzenie 13 *([4], twierdzenie 3.6) Niech $\mathcal{M} = (M, \leq, \ldots)$ będzie strukturą słabo o-minimalną i niech $m, n \in \mathbb{N}_+$. Załóżmy, że $X \subseteq M^m, Y \subseteq M^n, S \subseteq X \times Y$ są niepustymi zbiorami definiowalnymi w $\mathcal{M}$, S jest duży w $X \times Y$ oraz* $\dim(Y) = k$. *Wtedy zbiór*

$$\{\langle \overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_{2^k} \rangle \in X^{2^k} : S_{\overline{a}_1} \cup \ldots \cup S_{\overline{a}_{2^k}} \textit{ jest duży w } Y\}$$

jest duży X^{2^k}.

Dowód używa wyników rozdziału drugiego pracy [4]. Motywacją dla powyższego twierdzenia jest jego zastosowanie do badania grup definiowalnych w strukturach słabo o-minimalnych, będące częścią pracy [10], nie wchodzącej w zakres rozprawy habilitacyjnej.

Praca [4] nie odpowiada na pytanie, czy można zmniejszyć wykładnik 2^k występujący w twierdzeniu 13. W końcowej części trzeciego rozdziału omówiony został został przykład zbioru definiowalnego w strukturze słabo o-minimalnej zdefiniowanej w [MMS] świadczący o tym, że wykładnik pojawiający się w twierdzeniu 13 musi wynosić przynajmniej $k + 1$ (dla struktur o-minimalnych wystarcza 1).

W ostatnim rozdziale pracy [4] udowodnione zostało twierdzenie charakteryzujące własność addytywności wymiaru topologicznego w strukturach słabo o-minimalnych (tutaj $Y(S, n, d') \subseteq M^m$ jest zbiorem tych $\overline{b} \in M^n$, dla których $\dim(S^{\overline{b}}) = d'$).

Twierdzenie 14 *([4], twierdzenie 4.2) Niech $\mathcal{M} = (M, \leq, \ldots)$ będzie strukturą słabo o-minimalną. Następujące warunki są równoważne.*

(a) Dla dowolnego przedziału otwartego $I \subseteq M$ oraz dowolnej funkcji definiowalnej $f : I \longrightarrow \overline{M}^{\mathcal{M}}$ istnieje przedział otwarty $I' \subseteq I$ taki, że $f \restriction I'$ jest ciągła.

(b) Jeśli $m \in \mathbb{N}_+$, $B \subseteq M^m$ jest otwartą kostką zaś $f : B \longrightarrow \overline{M}^{\mathcal{M}}$ funkcją definiowalną, to istnieje kostka otwarta $B' \subseteq B$ taka, że $f \restriction B'$ jest ciągła.

(c) Jeżeli $m \in \mathbb{N}_+$, $i \in \{1, \ldots, m\}$ i $S \subseteq M^{m+1}$ jest niepustym zbiorem definiowalnym, to $\dim(S) = \dim(\pi_i^{m+1}[S])$ *wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór*

$$\{\overline{a} \in \pi_i^{m+1}[S] : (\pi_i^{m+1})^{-1}(\overline{a}) \cap S \textit{ jest skończony}$$

jest duży w $\pi_i^{m+1}[S]$.

(d) dim *ma własność addytywności w strukturze $\mathcal{M}$.*

(e) Jeżeli $m, n \in \mathbb{N}_+$, $S \subseteq M^{m+n}$ jest zbiorem definiowalnym oraz $d' \in \{-\infty, 0, 1, \ldots, m\}$, to

$$\dim \left(\bigcup_{\overline{b} \in Y(S,n,d')} S^{\overline{b}} \times \{\overline{b}\} \right) = \dim(Y(S, n, d')) + d'.$$

Przy spełnieniu któregoś z warunków (a)–(e) powyższego twierdzenia, wymiar topologiczny jest funkcją wymiaru w sensie [vdD1].

Własność addytywności wymiaru jest blisko związana z warunkiem wymiany dla definiowalnego domknięcia (dcl). Czwarty rozdział pracy [4] zawiera następującą obserwację.

Lemat 15 *Niech $\mathcal{M}$ będzie strukturą słabo o-minimalną.*

(a) Jeśli dla dowolnego $\mathcal{N} \succ \mathcal{M}$, dcl *ma własność wymiany w $\mathcal{N}$, to* dim *ma własność addytywności w $\mathcal{M}$.*

(b) Jeśli dim *ma własność addytywności w $\mathcal{M}$, to* dcl *ma własność wymiany w $\mathcal{M}$.*

5. Opis pozostałych prac

Dalej krótko omówione zostały najważniejsze wyniki moich publikacji nie wchodzących w skład rozprawy habilitacyjnej.

O-minimalne wzbogacenia porządków indukowanych z algebr Boole'a

[5] L. Newelski, R. Wencel, *Definable sets in Boolean ordered o-minimal structures. I*, J. Symbolic Logic 66 (2001), 1821–1836.

[6] R. Wencel, *Small theories of Boolean ordered o-minimal structures*, J. Symbolic Logic, 67 (2002), 1385–1390.

[7] R. Wencel, *Definable sets in Boolean ordered o-minimal structures. II*, J. Symbolic Logic 68 (2003), 35–51.

Trzy powyższe prace zawierają wyniki mojej rozprawy doktorskiej.

Niech $(M, \leq)$ będzie nieskończonym porządkiem częściowym. Strukturę $\mathcal{M} = (M, \leq, \ldots)$ nazywamy quasi o-minimalną, jeśli dowolny zbiór definiowalny $X \subseteq M$ definiowalny w $\mathcal{M}$ jest boolowską kombinacją zbiorów wyznaczonych przez nierówności postaci $x \geq a$, $x \leq b$, gdzie $a, b \in M$. Strukturę $\mathcal{M}$ nazywamy o-minimalną, jeśli dla dowolnego $A \subseteq M$, jeśli $X \subseteq M$ jest zbiorem definiowalnym w $\mathcal{M}$ nad A, to X jest boolowską kombinacją zbiorów wyznaczonych przez nierówności postaci $x \geq a$, $x \leq b$, gdzie $a, b \in acl(A)$. Oba te pojęcia są tożsame z klasycznym pojęciem o-minimalności w przypadku, gdy porządek $(M, \leq)$ jest liniowy. Oczywiście dowolna struktura o-minimalna w powyższym sensie jest quasi o-minimalna. Przeciwna implikacja na ogół nie zachodzi. Mówimy, że teoria struktury częściowo uporządkowanej jest silnie o-minimalna, jeśli wszystkie jej modele są o-minimalne.

W pracach [5], [6] i [7] rozwinięta została teoria modeli dla boolowsko uporządkowanych struktur o-minimalnych, tzn. dla częściowo uporządkowanych struktur o-minimalnych, których porządek indukowany jest z algebry Boole'a (nietrudno pokazać, że taka algebra Boole'a musi mieć skończenie wiele atomów [To]).

Załóżmy, że B jest nieskończoną algebrą Boole'a o skończenie wielu atomach, $\varphi(\overline{x}, \overline{y})$ jest formułą w języku algebr Boole'a L_{BA} i $\overline{a} \in B^{|\overline{y}|}$. W [5] zostało pokazane, że wtedy istnieje formuła $\psi(\overline{x}, \overline{z}) \in L_{BA}$ oraz ciąg parametrów $\overline{b} \in B^{|\overline{z}|}$ (możliwy do wybrania tylko na skończenie wiele sposobów) takie, że $\varphi(B^{|\overline{x}|}, \overline{a}) = \psi(B^{|\overline{x}|}, \overline{b})$. Bezpośrednią konsekwencją tego wyniku jest równoważność pojęć o-minimalności oraz quasi o-minimalności dla struktur boolowsko uporządkowanych.

Drugim ważnym rezultatem pracy [5] jest twierdzenie mówiące, że jeśli $\mathcal{M} = (B, \leq, \ldots)$ jest odpowiednio nasyconym boolowsko uporządkowanym modelem teorii silnie o-minimalnej, to dla każdego $A \subseteq M$ istnieje z dokładnością do izomorfizmu nad A dokładnie jeden model pierwszy nad A (istnienie zostało pokazane w [To]). Ogólna idea dowodu jest podobna do dowodu analogicznego twierdzenia w kontekście liniowo uporządkowanych struktur o-minimalnych. Używa się w nim pojęcia ortogonalności atomów w podalgebrach generowanych przez algebraicznie domknięte podzbiory struktur boolowsko uporządkowanych, przypominającego pojęcie ortogonalności typów w teorii stabilności.

Tematem pracy [6] są małe o-minimalne teorie struktur boolowsko uporządkowanych. Główne twierdzenie mówi, że dowolna taka teoria jest $\aleph_0$-kategoryczna, to znaczy z dokładnością do izomorfizmu posiada tylko jeden model przeliczalny. W szczególności dowodzi to prawdziwości hipotezy Vaughta dla klasy o-minimalnych teorii struktur boolowsko uporządkowanych. W pracy znaleziono też elegancki opis zbiorów definiowalnych w o-minimalnych strukturach boolowsko uporządkowanych, których teorie są małe (tzn. mają przeliczalnie wiele typów zupełnych nad zbiorem pustym).

W pracy [7] pokazano, że jeśli teoria struktury boolowsko uporządkowanej $\mathcal{M} = (B, \leq, \ldots)$ jest o-minimalna, to dowolny zbiór $X \subseteq B^m$ definiowalny w $\mathcal{M}$ jest sumą skończenie wielu parami rozłącznych zbiorów definiowalnych o szczególnie prostym opisie, zwanych komórkami. Prowadzi to do konkluzji, że dowolny model o-minimalnej teorii struktury słabo o-minimalnej jest bidefiniowalny z algebrą Boole'a z pewnymi wyróżnionymi stałymi.

Elementy urojone w algebrach Boole'a

[8] R. Wencel, *Weak elimination of imaginaries for Boolean algebras*, Annals of Pure and Applied Logic 132 (2005), 247–270.

[9] R. Wencel, *Imaginaries in Boolean algebras*, Mathematical Logic Quarterly 58 (2012), 217–235.

W pracy doktorskiej zajmowałem się badaniem o-minimalnych wzbogaceń częściowych porządków indukowanych z algebr Boole'a. Okazało się, że istotne znaczenie dla teorii takich struktur ma słaba eliminacja elementów urojonych dla odpowiednich algebr Boole'a. Warunek ten mówi, że dla dowolnej formuły $\varphi(\overline{x}, \overline{y})$ w języku danej struktury $\mathcal{M} = (M, \ldots)$ oraz dla dowolnego ciągu parametrów $\overline{a} \in M^{|\overline{x}|}$, istnieje formuła $\psi(\overline{x}, \overline{z})$, taka, że zbiór tych $\overline{c} \in M^{|\overline{z}|}$, dla których zbiory definiowalne przez $\varphi(\overline{x}, \overline{a})$ oraz $\psi(\overline{x}, \overline{c})$ są identyczne, jest niepusty i skończony.

Główny wynik pracy [8] (również pojawiający się w rozprawie doktorskiej) mówi, że, teoria algebry Boole'a B dopuszcza słabą eliminację elementów urojonych wtedy i tylko wtedy, gdy algebra ilorazowa $B/I(B)$ jest trywialna lub dwuelementowa. Symbolem $I(B)$ oznaczamy ideał B złożony ze wszystkich elementów postaci $x \sqcup y$, gdzie x jest atomowy, zaś y bezatomowy. Inne sformułowanie mówi, że jeśli B jest algebrą Boole'a to $|B/I(B)| \leq 2$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego zbioru definiowalnego w B, można znaleźć definiującą go formułę, w której zbiór parametrów wyznaczony jest z dokładnością do pewnej skończonej grupy permutacji.

Celem pracy [9] jest uogólnienie wyników pracy [8] oraz metod w niej zastosowanych. W sformułowaniu głównego twierdzenia używamy ideałów algebry Boole'a B zdefiniowanych indukcyjnie: $I_0(B) = \{0\}$, $I_{n+1}(B) = \pi^{-1}[I(B/I_n(B))]$, gdzie $\pi : B \longrightarrow B/I_n(B)$ jest odwzorowaniem kanonicznym. Mówimy, że element $a \in B$ jest duży w $b \in B$, jeśli $b \sqcap a' \in I_n(B)$, ale $b \notin I_n(B)$ dla pewnego n. Symbolem $+$ oznaczamy różnicę symetryczną.

Twierdzenie 16 *Załóżmy, że B jest nieskończoną algebrą Boole'a i $n \in \mathbb{N}_+$. Wówczas następujące warunki są równoważne.*

(a) $|B/I_n(B)| \leq 2$.

(b) *Jeśli* $r \in \mathbb{N}_+$ *i* $X \subseteq B^r$ *jest niepustym zbiorem definiowalnym, to istnieje formuła* $\psi(\overline{x}, z_{\leq m})$ *w języku* L_{BA} *spełniająca warunki:*

- *Zbiór* $\{d_{\leq m} \in B^{m+1} : X = \psi(B, d_{\leq m})\}$ *jest niepusty i każdy jego element wyznacza pewien podział jedności* 1_B.
- *dla dowolnego* $d_{\leq m}, e_{\leq m} \in B^{m+1}$, *jeśli* $X = \psi(B, d_{\leq m}) = \psi(B, e_{\leq m})$, *to istnieje jedyna permutacja* σ *zbioru* $\{0, \ldots, m\}$ *taka, że* $d_{\sigma(i)} + e_i \in I_{n-1}(B)$ *oraz* $d_{\sigma(i)} + e_i$ *nie jest duży w* d, *gdzie* $i \leq m$ *i* $d \in d_{\leq m}e_{\leq m}$.

Punkt (b) powyższego twierdzenia w przybliżeniu mówi, że dowolny zbiór definiowalny w algebrze Boole'a B można zdefiniować przy pomocy formuły, której parametry wyznaczone są z dokładnością do 'prawie permutacji'. Podstawiając w twierdzeniu 16 $n = 1$, otrzymujemy szczególny przypadek rozważany w [8].

Używając twierdzenia 16, dla danej algebry Boole'a B znajdujemy naturalną rodzinę $\emptyset$-definiowalnych relacji równoważności $\mathcal{E}_B$ taką, że dowolny element urojony z B^{eq} jest interdefiniowalny z elementem urojonym wyznaczonym przez pewną relację równoważności z $\mathcal{E}_B$. Wynika stąd, że B wraz z rodziną sortów wyznaczonych przez $\mathcal{E}_B$ dopuszcza eliminację elementów urojonych w odpowiednim języku wielosortowym.

Struktury algebraiczne definiowalne w strukturach topologicznych I rzędu

[10] R. Wencel, *Groups, group actions and fields definable in first-order topological structures*, Math. Logic Quart. 58 (2012), 449–467.

Wymiar topologiczny dla zbiorów definiowalnych w strukturach o-minimalnych jest tak zwaną funkcją wymiaru. W strukturach słabo o-minimalnych jednak stosunkowo łatwo skonstruować można zbiory definiowalne, dla których wymiar topologiczny nie spełnia warunku addytywności. Z tego powodu rozpatrujemy w pracy różne osłabienia własności bycia funkcją wymiaru, dowodząc szeregu faktów na temat pokrywania grup definiowalnych przez przesunięcia dużych podzbiorów definiowalnych. Otrzymujemy efektywne ograniczenia na liczbę potrzebnych przesunięć w zależności od wymiarów używanych zbiorów. W szczególności pokazujemy, że jeśli G jest grupą definiowalną w struktutrze słabo o-minimalnej, to dowolny jej duży podzbiór definiowalny jest generyczny, to znaczy skończenie wiele pewnych jego przesunięć pokrywa G.

W pracy badane są własności struktur algebraicznych (takich jak grupy, działania grup na zbiorach oraz ciała) definiowalnych w strukturach topologicznych I rzędu wyposażonych w funkcję wymiaru i spełniających pewne dość naturalne założenia. Jednym z zagadnień rozpatrywanych w tej pracy jest problem topologizacji takich grup, działań czy ciał. Przykładowy wynik (dla grup) mówi, że w opisanym kontekście na grupie definiowalnej G można określić topologię, z którą G stanowi grupę topologiczną i która na dużym zbiorze zgadza się z topologią produktową indukowaną z danej struktury.

Twierdzenia dotyczące topologizacji grup i ciał definiowalnych z pracy [10] uogólniają analogiczne wyniki A. Pillaya udowodnione w pracy [Pi2] dla struktur o-minimalnych. Nawiązują też do badań zawartych w [Mos], gdzie rozważa się grupy i ciała definiowalne w strukturach topologicznych I rzędu, w których algebraiczne domknięcie spełnia warunek wymiany.

Struktury słabo o-minimalne z własnością silnego rozkładu komórkowego

[11] R. Wencel, *On the strong cell decomposition property for weakly o-minimal structures*, Math. Logic Quart., praca zaakceptowana (22 strony).

Tematem niniejszej pracy są struktury słabo o-minimalne posiadające własność silnego rozkładu komórkowego, zdefniowaną w pracy [1]. Badane są tutaj dalsze konsekwencje wspomnianej własności oraz związki między daną strukturą słabo o-minimalną $\mathcal{M}$ posiadającą własność silnego rozkładu komórkowego a jej kanonicznym o-minimalnym rozszerzeniem $\overline{\mathcal{M}}$.

Jedno z podstawowych twierdzeń udowodnionych w pracy [11] mówi, że własność silnego rozkładu komórkowego jest niezmiennikiem relacji elementarnej równoważności dla struktur słabo o-minimalnych. W pracy zdefiniowano też zrelatywizowaną wersję kanonicznego rozszerzenia struktury słabo o-minimalnej z własnością silnego rozkładu komórkowego. Prowadzi ona do konstrukcji kowariantnego funktora z kategorii elementarnych rozszerzeń struktury słabo o-minimalnej $\mathcal{M}$ z własnością silnego rozkładu komórkowego w kategorię (o-minimalnych) elementarnych rozszerzeń $\overline{\mathcal{M}}$.

Trzeci rozdział pracy poświęcony jest związkom między własnościami topologicznymi zbiorów i funkcji definiowalnych a analogicznymi własnościami odpowiednich cięć. Dowodzimy na przykład, że zbiór definiowalny, którego cięcia pionowe są otwarte musi być 'kawałkami otwarty'. Podobnie, jeśli cięcia wykresu funkcji definiowalnej są wykresami funkcji ciągłych, to funkcja ta musi być kawałkami ciągła. Twierdzenia te uogólniają wyniki P. Speisseggera z pracy [Sp].

Kolejnym zagadnieniem badanym w pracy [11] są definiowalne relacje równoważności. Udowodnionych zostało tutaj szereg faktów uogólniających odpowiadające im twierdzenia z zakresu teorii struktur o-minimalnych. Dowody przeważnie mają charakter indukcyjny (indukcja względem wymiaru). Nie daje się tutaj bezpośrednio przenieść odpowiednich rozumowań znanych z przypadku o-minimalnego, gdyż silne komórki (w odróżnieniu od komórek definiowalnych w strukturach o-minimalnych) na ogół nie są zbiorami definiowalnie spójnymi.

W końcowej części pracy udowodnione zostało twierdzenie mówiące, że jeśli $\mathcal{M} = (M, \leq, \ldots)$ jest strukturą słabo o-minimalną spełniającą jeden z warunków:

(a) jeśli $B, C \subseteq M$, to B jest niezależny od C nad $\mathrm{dcl}(B) \cap \mathrm{dcl}(C)$;

(b) jeśli $A \subseteq M$, to $\mathrm{dcl}(A)$ jest elementarną podstrukturą M;

to $\mathcal{M}$ dopuszcza elimiację elementów urojonych. Dowód w dużej części wzorowany jest na dowodzie analogicznego faktu dla struktur o-minimalnych z pracy [Pi3].

Literatura

[Ar] R. Arefiev, *On monotonicity for weakly o-minimal structures*, Algebra and Model Theory II, edited by A. G. Pinus and K. N. Ponomarev, Novosibirsk, 1997, pp. 8–15.

[BP] Y. Baisalov, B. Poizat, *Paires de structures o-minimales*, J. Symbolic Logic 63 (1998), 570–578.

[Bz] B.S. Baizhanov, *Expansion of a model of a weakly o-minimal theory by a family of unary predicates*, J. Symbolic Logic 66 (2001), 1382–1414.

[BCR] J. Bochnak, M. Coste and F. Roy, **Real algebraic geometry**, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1998.

[ChD] G. Cherlin and M. A. Dickmann, *Real closed rings. II. Model theory*, Ann. Pure Appl. Logic 25 (1983), 213231.

[DD] J. Denef and L. van den Dries, *p-adic and real subanalytic sets*, Ann. of Math. 128 (1988), 79–138.

[Di] G. Diaz, *Grand degrés de transcendence pour des families d'exponentielles*, J. Number Theory 31 (1989), 1–23.

[D] M. A. Dickmann, *Elimination of quantifiers for ordered valuation rings*, J. Symbolic Logic 52 (1987), 116–128.

[vdD0] L. van den Dries, *Remarks on Tarski's problem concerning* $(\mathbb{R}, +, \cdot, \exp)$, **Logic Colloquium 1982**, G. Lolli, G. Longo and A. Marcia (eds), Elsevier Science Publishers B. V.

[vdD1] L. van den Dries, *Dimension of definable sets, algebraic boundedness and henselian fields*, Ann. Pure Appl. Logic 45 (1989), 189-209.

[vdD2] L. van den Dries, **Tame Topology and o-minimal Structures**, London Mathematical Society Lecture Notes Series, vol. 248, Cambridge: Cambridge University Press 1998.

[Fa] G. Faber, *Über arithmetische Eigenschaften analytischer Funktionen*, Mathematische Annalen 58 (1904), 545-557. MR1511251.

[HMS] L. Harrington, M. Makkai, S. Shelah, *A proof of Vaught's conjecture for ω-stable theories*, Israel J. Math. 49 (1984), 259280.

[KS] J. Kraiček and T. Scanlon, *Combinatorics with definable sets: Euler characteristics and Grothendieck rings*, Bull. Symbolic Logic 6 (2000), 311–330.

[Ku1] F.V. Kuhlmann, *Abelian groups with contractions I*, Contemporary Math. 171 (1994), 217–241.

[Ku2] F.V. Kuhlmann, *Abelian groups with contractions II: weak o-minimality*, in: **Abelian groups and modules** (Proceedings of the 1994 Padova Conference; A. Facchini and C. Menini, eds.), Dordrecht: Kluwer Academic Publishers 1995; pp. 323–342.

[LS] M. Laskowski and C. Steinhorn, *On o-minimal expansions of Archimedean ordered groups*, J. Symbolic Logic 60 (1995), 817–831.

[Ma1] L. Matthews, *Prime models and t-minimal structures*, preprint, Oxford University, 1992.

[Ma2] L. Matthews, *Cell decomposition and dimension functions in first-order topological structures*, Proc. London Math. Soc. 70 (1995), 1-32.

[May] L. Mayer *Vaught's Conjecture for o-Minimal Theories*, J. Symbolic Logic 53 (1988), 146-159.

[MMS] D. Macpherson, D. Marker, and C. Steinhorn, *Weakly o-minimal structures and real closed fields*, Trans. Amer. Math. Soc. 352 (2000), 5435–5483.

[Mi1] Ch. Miller, *Exponentiation is hard to avoid*, Proc. Amer. Math. Soc. 122 (1994), 257–259.

[Mi2] Ch. Miller, *A growth dichotomy for o-minimal expansions of ordered fields*. Logic: from foundations to applications (Staffordshire, 1993), 385–399, Oxford Sci. Publ., Oxford Univ. Press, New York, 1996.

[Mor] M. Morley, *Categoricity in power*, Transactions of the American Mathematical Society 114 (1965), 514-538.

[Mos] A. Mosley, *Groups definable in topological structures*, praca doktorska, Queen Mary and Westfield College, London University, 1996.

[Pi1] A. Pillay, *First order topological structures and theories*, J. Symbolic Logic 52 (1987), 763–778.

[Pi2] A. Pillay, *On groups and fields definable in o-minimal structures*, J. Pure Appl. Algebra 53 (1988), 239-255.

[Pi3] A. Pillay, *Some remarks on definable equivalence relations in o-minimal structures*, J. Symbolic Logic 51 (1986), 709–714.

[PS] A. Pillay and C. Steinhorn, *Definable sets in ordered structures. I*, Trans. AMS 295 (1986), 565-592.

[PeS] Y. Peterzil, S. Starchenko *A trichotomy theorem for o-minimal structures*, Proc. London Math. Soc. 77 (1998), 481523.

[Sh] S. Shelah, **Classifcation theory and the number of non-isomorphic models**, North-Holland, Amsterdam 1978 (drugie wydanie: 1990).

[Sh783] S. Shelah *Dependent first order theories, continued*, Israel J. Math. 173 (2009), 1–60.

[Sp] P. Speissegger, *Fiberwise properties of definable sets and functions in o-minimal structures*, Manuscripta Math. 86 (1995), 283-291.

[To] C. Toffalori, *Lattice ordered o-minimal structures*, Notre Dame J. Formal Logic 39 (1998), 447-463.

R. Wencel

....

Podpis wnioskodawcy