Autoreferat

1 Imię i nazwisko

Katarzyna Paluch

2 Posiadane dyplomy i stopnie naukowe

Stopień doktora nauk matematycznych w zakresie informatyki
Uniwersytet Wrocławski, 2005
Tytuł rozprawy doktorskiej:
Approximation Algorithms for Rectangle Tiling
Promotor: prof. Krzysztof Loryś

Stopień magistra informatyki
Instytut Informatyki Uniwersytetu Wrocławskiego, 2001
Tytuł pracy magisterskiej:
Kafelkowanie prostokątami
Promotor: prof. Krzysztof Loryś

3 Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych

01.10.2006 - : adiunkt w Instytucie Informatyki Uniwersytetu Wrocławskiego
01.10.2005 - 30.09.2006: staż podoktorski w Max Planck Instiute for Computer Science, Saarbrücken, Niemcy
01.10.2004 - 30.09.2006: asystent w Instytucie Informatyki Uniwersytetu Wrocławskiego
01.04.2003 - 31.12.2003: Marie Curie Doctoral Fellowship w Max Planck Instiute for Computer Science, Saarbrücken, Niemcy
01.10.2001 - 30.09.2004: doktorantka w Instytucie Informatyki Uniwersytetu Wrocławskiego

4 Osiągnięcie naukowe

4.1 Tytuł osiągnięcia

Skojarzenia w algorytmach dla tras komiwojażera i zadaniach przydziału z preferencjami

4.2 Publikacje wchodzące w skład osiągnięcia

1. Katarzyna E. Paluch, Khaled M. Elbassioni, Anke van Zuylen: Simpler Approximation of the Maximum Asymmetric Traveling Salesman Problem. STACS 2012: 501-506
2. Katarzyna E. Paluch, Marcin Mucha, Aleksander Mądry: A 7/9 - Approximation Algorithm for the Maximum Traveling Salesman Problem. APPROX-RANDOM 2009: 298-311
3. Katarzyna E. Paluch: Capacitated Rank-Maximal Matchings. CIAC 2013: 324-335
4. Katarzyna E. Paluch: Popular and clan-popular b-matchings. Theor. Comput. Sci. 544: 3-13 (2014)
5. Katarzyna E. Paluch: Faster and Simpler Approximation of Stable Matchings. Algorithms 7(2): 189-202 (2014)
6. Adam Kunysz, Katarzyna E. Paluch, Pratik Ghosal: Characterisation of Strongly Stable Matchings. SODA 2016: 107-119

4.3 Opis osiągnięcia

4.3.1 Definicje i oznaczenia

Skojarzenie w grafie $G = (V, E)$ to dowolny zbiór M krawędzi grafu, z których żadne dwie nie mają wspólnego końca. Dla danego skojarzenia M wierzchołek $v \in V$ nazywamy *skojarzonym* (w M) jeśli istnieje krawędź $e \in M$ incydentna do v. Jeśli żadna krawędź incydentna do v nie należy do skojarzenia M, wierzchołek v jest *nieskojarzony* lub *wolny* (w M). Dla wierzchołka v skojarzonego w M przez $M(v)$ oznaczamy wierzchołek w taki, że $(v, w) \in M$ i mówimy, że v jest skojarzony z w w M lub, że w jest przydzielony wierzchołkowi v w M. Skojarzenie nazywamy *doskonałym*, jeśli każdy wierzchołek grafu jest w nim skojarzony.

Uogólnieniem skojarzeń są b-skojarzenia. Dla danej funkcji $b : V \to \mathcal{N}$ podzbiór M krawędzi E jest b-skojarzeniem, jeśli dla każdego wierzchołka $v \in V$ liczba krawędzi należących do M i incydentnych do v nie przekracza $b(v)$, czyli $deg_M(v) \le b(v)$. Jeśli dla każdego wierzchołka $v \in V$ zachodzi $deg_M(v) = b(v)$, b-skojarzenie M nazywamy *doskonałym.*

W problemach grafowych, w których krawędzie mają wagi przez *wagę* ustalonego zbioru krawędzi F rozumiemy sumę wag krawędzi z F czyli $w(F) = \sum_{e \in F} w(e)$, gdzie $w(e)$ oznacza wagę krawędzi e. Konsekwentnie, waga cyklu c oznacza wagę zbioru krawędzi wchodzących w skład c. Waga grafu lub podgrafu $H = (V, E)$ oznacza zaś wagę zbioru krawędzi E.

Cykl o długości i tzn. składający się z i krawędzi nazywany jest *i-cyklem*, 3-cykl - trójkątem, a 4-cykl kwadratem.

Przez n i m oznaczamy odpowiednio liczbę wierzchołków i krawędzi w rozważanym grafie.

4.3.2 Problem Max TSP

Problem maksymalnego komiwojażera (Max TSP) jest klasycznym wariantem słynnego problemu komiwojażera (TSP). Max TSP znany jest również pod nazwą ,,zachłannego taksówkarza". W problemie tym dany jest graf pełny o nieujemnych wagach na krawędziach i zadanie polega na znalezieniu w nim trasy komiwojażera, czyli cyklu Hamiltona, o maksymalnej wadze.

Problem ten jest rozważany zarówno w grafach nieskierowanych (symetryczny maksymalny komiwojażer - Max STSP), jak i grafach skierowanych (asymetryczny maksymalny komiwojażer - Max ATSP). Wiadomo, że jest on APX-trudny [52]. Zatem zakładając, że $P \neq NP$, istnieje pewna stała $\epsilon < 1$, która jest ograniczeniem górnym na współczynnik aproksymacji dla tego problemu.

Jednym z bardziej znanych zastosowań maksymalnego komiwojażera w grafach skierowanych jest problem najkrótszego nadsłowa (ang. shortest superstring), który pojawia się przy sekwencjonowaniu DNA i w kompresji danych. Istnieje szereg prac pokazujących, jak otrzymać algorytm aproksymacyjny dla najkrótszego nadsłowa przy użyciu algorytmu aproksymacyjnego dla maksymalnego komiwojażera. W najnowszej z nich Mucha [44] udowodnił, że algorytm α-aproksymacyjny algorytm dla Max ATSP daje algorytm o współczynniku $2 + \frac{11(1-\alpha)}{9-2\alpha}$ dla problemu najkrótszego nadsłowa. Ponadto na bazie algorytmu α-aproksymacyjnego dla Max ATSP można skonstruować algorytm o takiej samej gwarancji aproksymacji dla problemu maksymalnej kompresji zdefinowanego przez Tarhio i Ukkonena [53].

Jeśli chodzi o wariant symetryczny problemu maksymalnego komiwojażera, to ma on zastosowania w kombinatoryce i biologii obliczeniowej: problem jest przydatny w analizie interakcji między RNA oraz w kompresji wyników sekwencjonowania DNA [**?**] [**?**]. Został użyty także w problemie znajdowania maksymalnego wagowo pokrycia trójkątami [23] oraz kombinatorycznym problemie zwanym *bandpass-2* [14], w którym chcemy znaleźć najlepszą permutację wierszy w macierzy boolowskiej tak, aby zmaksymalizować ważoną sumę struktur zwanych *pasmami* (ang. bandpasses).

Ograniczenia górne w problemach Max TSP Niech OPT oznacza wagę maksymalnej wagowo trasy komiwojażera. Dwoma bardzo znanymi i szeroko stosowanymi ograniczeniami górnymi, odpowiednio na OPT i $OPT/2$ są waga maksymalnego wagowo *pokrycia cyklowego* i waga maksymalnego wagowo skojarzenia doskonałego. *Pokrycie cyklowe* grafu G, to dowolny zbiór cykli taki, że każdy wierzchołek grafu G należy do dokładnie jednego cyklu ze zbioru. Jeśli graf G jest skierowany, to cykle w pokryciu cyklowym grafu G są również skierowane. Pokrycie cyklowe jest pewnego rodzaju skojarzeniem, a dokładniej mówiąc, doskonałym 2-skojarzeniem, czyli b-skojarzeniem dla funkcji b, która dla każdego wierzchołka $v \in V$ ma wartość $b(v) = 2$. Do obliczania maksymalnego (jak również minimalnego) wagowo pokrycia cyklowego istnieją szybkie algorytmy wielomianowe [**?**]. Trasa komiwojażera jest szczególnym przypadkiem pokrycia cyklowego grafu - składającego się z dokładnie jednego cyklu. Dlatego waga maksymalnego wagowo pokrycia cyklowego grafu jest ograniczeniem górnym na OPT.

Jeśli graf G ma parzystą liczbę wierzchołków, to trasę komiwojażera można rozbić na dwa skojarzenia doskonałe i waga cięższego z nich wynosi co najmniej $\frac{OPT}{2}$. Wobec tego, waga maksymalnego wagowo skojarzenia doskonałego jest również ograniczeniem górnym dla problemu Max TSP - na $\frac{OPT}{2}$.

W oparciu o maksymalne wagowo pokrycie cyklowe C_{max} można skonstruować bardzo prosty algorytm aproksymacyjny dla problemu Max TSP, którego współczynnik aproksymacji wynosi $\frac{2}{3}$ w grafach nieskierowanych i $\frac{1}{2}$ w grafach skierowanych. Algorytm jest następujący. Z każdego cyklu wchodzącego w skład pokrycia cyklowego C_{max} usuwamy krawędź o najmniejszej wadze, otrzymując w ten sposób zbiór rozłącznych wierzchołkowo ścieżek. Ścieżki te łączymy dodając dodatkowe krawędzie tak, by tworzyły cykl komiwojażera. Jeśli cykl c ma długość k, to usuwając jego najlżejszą krawędz, otrzymujemy ścieżkę o wadze co najmniej $\frac{k-1}{k}w(c)$, gdzie przez $w(c)$ oznaczamy wagę cyklu c. W grafie nieskierowanym każdy cykl ma długość przynajmniej 3, a w skierowanym przynajmniej 2, stąd współczynniki $\frac{2}{3}$ i $\frac{1}{2}$. Bläser i Manthey [12] udowodnili, że znajdowanie maksymalnego wagowo pokrycia cyklowego bez

2-cykli jest NP-trudne. Jeśli chodzi o grafy nieskierowane to status problemu znajdowania maksymalnego wagowo pokrycia cyklowego bez trójkątów nie jest znany. Natomiast wiadomo, że obliczenie pokrycia cyklowego bez trójkątow i kwadratów maksymalizującego wagę jest problemem NP-trudnym [**?**].

W pracach [1] i [2] podajemy dwie nowe metody otrzymywania ,,zrelaksowanych" pokryć cyklowych bez krótkich cykli.

Krótki przegląd znanych wyników dla problemów Max TSP Pierwszy algorytm aproksymacyjny dla problemu Max TSP w grafach skierowanych został opisany przez Fishera, Nemhausera i Wolsey [16]. Ma on współczynnik $\frac{1}{2}$. Kolejne algorytmy aproksymacyjne miały współczynniki odpowiednio: $\frac{38}{63}$ - podany przez Kosaraju, Park i Stein [36], $\frac{8}{13}$ - skonstruowany przez Bläsera [10], $\frac{5}{8}$ - autorstwa Lewensteina i Sviridenko [37] i w końcu $\frac{2}{3}$ - podany w [31] przez Kaplana, Lewensteina, Shafrir i Sviridenko [31] oraz w [1] przez Elbassioniego, Paluch i van Zuylen.

Algorytm Kaplana i współautorów bazuje na rozwiązaniu pewnego programu liniowego. Aby poradzić sobie z ułamkami w rozwiązaniu, przemnażane jest ono przez najmniejszą wspólną wielokrotność mianowników. Następnie z tak otrzymanego rozwiązania całkowitoliczbowego konstruuje się parę pokryć cyklowych o łącznej wadze $2OPT$, na podstawie których przy pomocy skomplikowanej procedury kolorowania obliczana jest trasa komiwojażera. Algorytm ten ma wielomianowy czas działania, jednak stopień wielomianu jest duży. Algorytm podany w [1] jest dużo prostszy i szybszy.

Pierwsze algorytmy aproksymacyjne dla problemu Max TSP w grafach nieskierowanych zostały również opisane przez Fishera, Nemhausera i Wolsey [16]. Pokazali oni kilka algorytmów o współczynniku aproksymacji $\frac{1}{2}$ i jeden o współczynniku $\frac{2}{3}$. Kosaraju, Park i Stein [36] przedstawili ulepszony algorytm o gwarancji aproksymacji $\frac{19}{27}$. Wynik ten został poprawiony przez Hassina i Rubinsteina [21], którzy podali algorytm $\frac{5}{7}$-aproksymacyjny. W międzyczasie po rosyjsku został opublikowany prosty i elegancki algorytm $\frac{3}{4}$-aproksymacyjny autorstwa Serdyukova [**?**]. Algorytm ten korzysta z dwóch ograniczeń górnych na OPT - z maksymalnego wagowo pokrycia cyklowego C_{max} oraz maksymalnego wagowo skojarzenia doskonałego, które w sumie mają wagę przynajmniej $\frac{3}{2}OPT$. Następnie multizbiór krawędzi składający się z jednej kopii C_{max} i jednej kopii M_{max} jest dzielony na dwa zbiory rozłącznych wierzchołkowo ścieżek (innymi słowy, multizbiór ten jest 2-kolorowany ścieżkowo) i cięższy z tych dwóch zbiorów jest uzupełniany do cyklu Hamiltona, który w rezultacie ma wagę przynajmniej $\frac{3}{4}OPT$.

Później Hassin i Rubinstein [22] podali zrandomizowany algorytm o oczekiwanym współczynniku aproksymacji $\frac{25(1-\epsilon)}{33-32\epsilon}$ i czasie działania $O(n^2(n+2^{1/\epsilon}))$, gdzie ϵ jest dowolnie małą dodatnią stałą. Pierwszy algorytm deterministyczny o współczynniku lepszym niż $\frac{3}{4}$ został podany przez Chena, Okamoto i Wanga [13]. Podali ono algorytm o gwarancji aproksymacji $\frac{61}{81}$ i czasie działania $O(n^3)$. Agorytm ten polega na nietrywialnej derandomizacji algorytmu podanego w [22]. Najlepszy opublikowany algorytm aproksymacyjny dla Max STSP został podany przez Paluch, Muchę i Mądrego [2]. Osiąga on współczynnik $\frac{7}{9}$ i działa w czasie $O(n^3)$.

Max TSP w grafach skierowanych i półkrawędzie jako narzędzie otrzymywania wzmocnionych ograniczeń górnych .

Jak wiadomo [12], znajdowanie maksymalnego wagowo pokrycia cyklowego bez 2-cykli jest NP-trudne. Jednakże, jeśli zmodyfikujemy nieco pojęcie pokrycia cyklowego i pozwolimy, aby zawierało ono tzw. półkrawedzie, to okazuje się, że takie zrelaksowane pokrycie cyklowe bez 2-cykli o maksymalnej wadze już można obliczyć w czasie wielomianowym.

Zdefiniujmy teraz półkrawędzie i zrelaksowane pokrycie cyklowe. Pokrycie cyklowe w grafie skierowanym to taki zbiór skierowanych cykli, że każdy wierzchołek należy do dokładnie jednego cyklu ze zbioru. Równoważnie, pokrycie cyklowe w grafie skierowanym to taki zbiór krawędzi, że każdy wierzchołek v grafu ma w nim dokładnie jedną krawędz wchodzącą i dokładnie jedną wychodzącą. W wyjściowym grafie $G = (V, E)$ dzielimy każdą krawędź skierowaną (u, v) na dwie półkrawędzie tak, że jedna z tych półkrawędzi zawiera głowę u, a druga ogon v. Tworzymy w ten sposób nowy graf $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$, który w miejsce jednej skierowanej krawędzi (u, v) grafu G zawiera dwie skierowane krawędzie $(u, x_{(u,v)})$ oraz $(x_{(u,v)}, v)$, zwane *półkrawędziami* krawędzi (u, v). Waga każdej z półkrawędzi krawędzi (u, v) wynosi $\frac{1}{2}w((u, v))$. Zbiór wierzchołków $\tilde{V}$ grafu $\tilde{G}$ zawiera wszystkie wierczchołki grafu G oraz po jednym nowym wierzchołku $x_{(u,v)}$ na każdą krawędź (u, v) oryginalnego grafu G. Zrelaksowane pokrycie cyklowe grafu G bez 2-cykli zdefiniowane jest następująco.

Definicja 1 Zrelaksowane pokrycie cyklowe bez 2-cykli grafu G *to zbiór krawędzi* $\tilde{C} \subseteq \tilde{E}$ *taki, że:*

(i) każdy wierzchołek z V ma dokładnie jedną krawędź wchodzącą i dokładnie jedną krawędź wychodzącą w zbiorze $\tilde{C}$;

(ii) dla każdej krawędzi $(u, v) \in E$, $\tilde{C}$ zawiera albo zero krawędzi ze zbioru $\{(u, x_{(u,v)}), (x_{(u,v)}, v), (v, x_{(v,u)}), (x_{(v,u)}, u)\}$, albo zawiera dokładnie jedną krawędź incydentną do u i dokładnie jedną incydentną do v.

Waga zrelaksowanego pokrycia cyklowego bez 2-cykli to $w(\tilde{C}) = \sum_{e \in \tilde{C}} w(e)$.

W pracy [1] pokazano:

Twierdzenie 1 *Zrelaksowane pokrycie cyklowe bez 2-cykli grafu G mające maksymalną wagę można obliczyć w czasie wielomianowym.*

Problem znajdowania maksymalnego wagowo zrelaksowanego pokrycia cyklowego bez 2-cykli sprowadzany jest do problemu znajdowania maksymalnego wagowo doskonałego skojarzenia w grafie nieskierowanym o liczbie wierzchołków $O(n)$ i krawędzi $O(m)$.

Oczywistym jest, że waga maksymalnego wagowo zrelaksowanego pokrycia cyklowego bez 2-cykli grafu G jest ograniczeniem górnym na OPT.

Aby zrelaksowane pokrycie cyklowe mogło się przydać do aproksymacji Max TSP, trzeba coś zrobić z półkrawędziami. W tym celu rozważamy multizbiór krawędzi Z, tym razem już oryginalnego grafu G, który jest w pewnym sensie „podwojeniem" zbioru $\tilde{C}$. Dokładniej mówiąc, niech $\tilde{C}_{max}$ oznacza maksymalne wagowo zrelaksowane pokrycie cyklowe bez 2-cykli. Wówczas, jeśli $\tilde{C}_{max}$ zawiera obie półkrawędzie pewnej krawędzi (u, v), w Z znajdą się dwie kopie krawędzi (u, v). Jeśli natomiast $\tilde{C}_{max}$ zawiera dokładnie jedną półkrawędź krawędzi (u, v), wtedy Z będzie zawierać jedną kopię krawędzi (u, v). Zauważmy, że waga multizbioru $Z = \sum_{e \in Z} w(e)$ jest równa dokładnie $2w(\tilde{C}_{max})$, czyli co najmniej $2OPT$.

Wprowadzimy teraz pojęcie *kolorowania ścieżkowego.*

Definicja 2 *Niech Z będzie pewnym multizbiorem krawędzi grafu G (skierowanego lub nieskierowanego). Wówczas, k-*pokolorować ścieżkowo *multizbiór Z oznacza przyporządkować każdej krawędzi z Z jeden z k kolorów w taki sposób, aby wszystkie krawędzie o tym samym kolorze tworzyły kolekcję rozłącznych wierzchołkowo ścieżek w grafie G, przy czym jeśli G jest skierowany, to ścieżki te również powinny być skierowane.*

Równoważnie, k-pokolorować ścieżkowo multizbiór Z oznacza podzielić krawędzie multizbioru Z na k rozłącznych zbiorów tak, aby każdy z tych k zbiorów tworzył kolekcję rozłącznych ścieżek.

Lemat 1 *[1] Multizbiór Z otrzymany z maksymalnego wagowo zrelaksowanego pokrycia cyklowego bez 2-cykli można 3-pokolorować ścieżkowo.*

Ponieważ łączna waga multizbioru Z wynosi co najmniej $2OPT$, to w przynajmniej jednym z trzech zbiorów odpowiadającym trzem kolorom krawędzie w sumie będą mieć wagę co najmniej $\frac{2}{3}OPT$. Ścieżki z tego zbioru uzupełniamy krawędziami spoza tego zbioru, aby utworzyć cykl Hamiltona. Ponieważ każda krawędź ma wagę nieujemną, otrzymujemy trasę komiwojażera o wadze co najmniej $\frac{2}{3}OPT$. Zatem udowodniliśmy:

Twierdzenie 2 *[1] Dla problemu Max TSP w grafach skierowanych istnieje prosty i szybki wielomianowy algorytm aproksymacyjny o współczynniku aproksymacji $\frac{2}{3}$.*

Można zadać sobie pytanie, czy w podobny sposób da się obliczyć maksymalne wagowo pokrycie cyklowe bez 2-cykli i trójkątów, ale z półkrawędziami. Odpowiedź na to pytanie jest negatywna. Powód jest taki, że w grafie skierowanym każdy 2-cykl jest rozłączny krawędziowo z dowolnym innym 2-cyklem, co już nie jest prawdą dla trójkatów. Mając jednak jedno pokrycie cyklowe C (z półkrawędziami lub bez), można znaleźć przy pomocy półkrawędzi drugie pokrycie cyklowe C', które nie zawiera żadnego 2-cyklu ani żadnego trójkąta występującego w C oraz takie, że jego waga $w(C')$ jest także ograniczeniem górnym na OPT. Ogólniej, przy pomocy półkrawędzi można eliminować również dłuższe cykle, jak i inne problematyczne podgrafy i uzyskiwać w ten sposób nowe pokrycia cyklowe, których wagi są kolejnymi ograniczeniami górnymi na OPT. Metoda ta została zastosowana w nieopublikowanych jeszcze pracach [50] i [51].

Max TSP w grafach nieskierowanych i technika bazująca na cyklach alternujących
W algorytmie Serdyukova [**?**] przeszkodą w osiągnięciu współczynnika aproksymacji lepszego niż $\frac{3}{4}$ jest obecność trójkątów i kwadratów. By mieć szansę poprawienia wspólczynnika $\frac{3}{4}$, warto byłoby umieć znajdować pokrycie cyklowe o wadze co najmniej OPT i albo, nie zawierające ani trójkątów ani kwadratów, albo chociaż takie które nie zawiera trójkątów ani kwadratów występujących w maksymalnym wagowo pokryciu cyklowym C_{max}.

Do uzyskiwania pokryć cyklowych eliminujących trójkąty i kwadraty z danego pokrycia cyklowego C w pracy [2] została przedstawiona technika bazująca na cyklach alternujących. Główne idee zawarte w tej technice przedstawiamy poniżej.

Załóżmy, że mamy dane maksymalne wagowo pokrycie cyklowe C_{max}, które zawiera co najmniej jeden trójkąt lub co najmniej jeden kwadrat. Powiemy, że pokrycie cyklowe C' jest *dobre* jeśli:

- dla każdego trójkąta t z C_{max}, pokrycie cyklowe C' nie zawiera przynajmniej jednej krawędzi z t (czyli C' nie zawiera t) oraz
- dla każdego kwadrata s z C_{max}, C' nie zawiera żadnego kwadrata ani trójkąta, którego wszystkie wierzchołki znajdują się na s, co w szczególności oznacza, że C' nie zawiera również s.

Zauważmy, że każda trasa komiwojażera w grafie o liczbie wierzchołków większej niż 4 jest dobrym pokryciem cyklowym, gdyż składa się tylko z jednego cyklu.

Obserwacja 1 *Waga maksymalnego wagowo dobrego pokrycia cyklowego wynosi co najmniej OPT.*

Przyjrzyjmy się teraz różnicy symetrycznej $C_{max} \oplus C' = (C_{max} \setminus C') \cup (C' \setminus C_{max})$ między C_{max} i dobrym pokryciem cyklowym C'.

Różnicę symetryczną dowolnych dwóch pokryć cyklowych C_1 i C_2 tego samego grafu G można rozbić na zbiór rozłącznych krawędziowo *cykli alternujących* (względem zarówno C_1, jak i C_2). Definicję cyklu alternującego podajemy poniżej.

Definicja 3 *Niech C będzie dowolnym pokryciem cyklowym grafu G. Wówczas* cyklem alternującym (względem C) *nazywamy dowolną sekwencję krawędzi postaci* $P = ((v_1, v_2), (v_2, v_3), \ldots, (v_{2k-1}, v_{2k}), (v_{2k}, v_1))$ *i taką, że*

- *dla każdego i takiego, że $1 \leq i \leq k$ krawędź (v_{2i-1}, v_{2i}) należy do C,*
- *krawędź (v_{2k}, v_1) nie należy do C oraz dla każdego i takiego, że $1 \leq i \leq k-1$ krawędź (v_{2i}, v_{2i+1}) również nie należy do C,*
- *dowolna krawędź grafu G występuje w P co najwyżej raz,*
- *wierzchołki $v_1, \ldots, v_{2k}$ nie muszą być wszystkie różne.*

Ścieżka alternująca ma podobną definicję, przy czym nie wymagamy, aby zaczynała i kończyła się tym samym wierzchołkiem.

Po *zastosowaniu* cyklu alternującego $\mathcal{A}$ do pokrycia cyklowego C otrzymujemy inne pokrycie cyklowe (tego samego grafu) $C_1 = C \oplus A$.
Ponieważ $C' = C_{max} \oplus (C' \oplus C_{max})$, otrzymujemy:

$$w(C') = w(C_{max}) - w(C_{max} \cap (C' \oplus C_{max})) + w(C' \cap (C' \oplus C_{max})).$$

Dla wygody, wprowadzamy pojęcie *alternującej wagi w' (względem C_{max})* i definiujemy ją dla zbioru krawędzi S jako $w'(S) = w(S \setminus C_{max}) - w(S \cap C_{max})$. Używając tego pojęcia przeformułowujemy powyższą zależność dla wagi pokrycia cyklowego C' i zapisujemy jako:

$$w(C') = w(C_{max}) + w'(C' \oplus C_{max}).$$

Ponieważ C_{max} jest pokryciem cyklowym o maksymalnej wadze, waga C' nie może przewyższać wagi C_{max}, czyli $w'(C' \oplus C_{max}) \leq 0$. Widzimy zatem, że maksymalne wagowo dobre pokrycie cyklowe to takie, które spośród wszystkich dobrych pokryć cyklowych ma największą wagę alternującą różnicy symetrycznej z pokryciem cyklowym C_{max}. O zadaniu znajdowania maksymalnego wagowo dobrego pokrycia cyklowego możemy w takim razie myśleć jak o znajdowaniu zbioru cykli alternujących o odpowiednich własnościach i takiego, którego waga alternująca jest maksymalna.

Zbiór cykli alternujących $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_r$ ma ,,odpowiednie własności", jeśli po zastosowaniu wszystkich cykli alternujących w nim zawartch do pokrycia cyklowego C_{max} otrzymujemy dobre pokrycie cyklowe.

Istotną własnością zbioru cykli alternująch, których zastosowanie do C_{max} powoduje, że pokrycie cyklowe C_{max} przekształca się w dobre pokrycie cyklowe opisaną w Fakcie 1 pracy [2] jest taka, że przez każdy trójkąt i kwadrat należący do C_{max} przechodzi jakiś cykl alternujący. Bardziej precyzyjnie, własność ta jest następująca.

- Dla każdego trójkąta t z C_{max} istnieje cykl alternujący $\mathcal{A}_t$ zawierający ścieżkę alternującą postaci $((v_0, v_1), (v_1, v_2), (v_2, v_3))$ taką, że krawędź (v_1, v_2) należy do trójkąta t. Wówczas oczywiście oznacza to, że wierzchołki v_0 i v_3 nie znajdują się na t.

- Dla każdego kwadrata s z C_{max} istnieje cykl alternujący $\mathcal{A}_s$ zawierający ścieżkę alternującą postaci $((v_0, v_1), (v_1, v_2), \ldots, (v_k, v_{k+1}))$ taką, że $k \in \{2, 4\}$, wierzchołki $v_1, \ldots, v_k$ należą do s, wierzchołki v_0 i v_{k+1} nie należą do s oraz, co jest istotne, $v_1 \neq v_k$.

Niech *cykl krótki* oznacza dowolny trójkąt lub kwadrat należący do pokrycia cyklowego C_{max}.

Stwierdziliśmy, że aby obliczyć maksymalne wagowo dobre pokrycie cyklowe, wystarczy znaleźć maksymalny względem wagi alternującej zbiór cykli alternujących przechodzących przez każdy krótki cykl z pokrycia C_{max}. Ale jak znaleźć taki zbiór?

Pomysł w skrócie polega na tym, aby do oryginalnego grafu G dodać kopie wszystkich wierzchołków należących do krótkich cykli i wymusić za pomocą tzw. gadżetów, aby odpowiednio zdefiniowane b-skojarzenie kodowało kawałki ścieżek alternujących przechodzących przez krótkie cykle. Niejako, taki kawałek ścieżki alternującej przechodzącej przez krótki cykl c jest ,,zawieszony" na wierzchołkach będących kopiami wierzchołków z c. Dla każdego krótkiego cyklu dokładnie dwa wierzchołki, które są kopiami wierzchołków cyklu c ,,łaczą się ze światem zewnętrznym" w tym b-skojarzeniu, czyli z takimi wierzchołkami v_1 i v_2 (v_1 może być równy v_2), które albo należą do G ale nie do c, albo są kopiami wierzchołków nienależących do c.

Dzięki opisanej metodzie w [2] pokazane zostało następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3 *[2] Dla dowolnego pełnego grafu G o niujemnych wagach na krawędziach można obliczyć multipodgraf $H = (V, E_H)$ grafu G taki, że H jest 4-regularny, dla dowolnej pary wierzchołków zawiera co najwyżej dwie krawędzie je łączące, ma wagę co najmniej $\frac{35}{18}OPT$ i którego każda spójna składowa zawiera co najmniej 5 wierzchołków.*

O multigrafie H z tego twierdzenia można w pewnym sensie myśleć jak o złożeniu dwóch pokryć cyklowych: maksymalnego wagowo pokrycia C_{max} i maksymalnego wagowo dobrego pokrycia cyklowego C' (konstruowanego w odniesieniu do pokrycia C_{max}). Waga tego multigrafu wynosi $\frac{35}{18}OPT$, a nie $2OPT$ z tego powodu, że dla kwadratów kodowanie fragmentów ścieżek alternujących przez nie przechodzących nie odbywa się w sposób dokładny.

O tym jak wydobyć odpowiednio ciężki kawałek trasy komiwojażera z multigrafu H mówi następujące twierdzenie:

Twierdzenie 4 *[2] Dla dowolnego 4-regularnego multigrafu $H = (V, E_H)$ o nieujemnych wagach na krawędziach, zawierającego dla dowolnej pary wierzchołków co najwyżej dwie krawędzie je łączące i którego każda spójna składowa zawiera co najmniej 5 wierzchołków, potrafimy znaleźć podzbiór krawędzi $E' \subset E_H$, którego waga nie przekracza $\frac{1}{5}w(E_H)$ oraz taki, że multigraf $H' = (V, E_H \setminus E')$ można 2-pokolorować ścieżkowo.*

Zauważmy, że multigraf H' z powyższego twierdzenia skonsruowany z multigrafu H z Twierdzenia 3 ma wagę co najmniej $\frac{4}{5} \cdot \frac{35}{18}OPT = 2 \cdot \frac{7}{9}OPT$, co oznacza, że po 2-pokolorowaniu go ścieżkowo jeden z dwóch kolorów będzie zawierał zbiór rozłącznych wierzchołkowo ścieżek o wadze co najmniej $\frac{7}{9}OPT$. Ze zbioru takich ścieżek można bez trudu utworzyć cykl komiwojażera o wadze co najmniej $\frac{7}{9}OPT$.

Wprowadzamy teraz pojęcie k-kolorowania l-cyklowego i prawie k-kolorowania l-cyklowego.

Definicja 4 *Niech Z będzie pewnym multizbiorem krawędzi grafu G. Wówczas,* k-pokolorować l-cyklowo *multizbiór Z oznacza przyporządkować każdej krawędzi z Z jeden z k kolorów w taki sposób, aby wszystkie krawędzie o tym samym kolorze tworzyły w grafie G kolekcję rozłącznych wierzchołkowo ścieżek oraz cykli, przy czym każdy cykl powinien mieć długość przynajmniej l.*

Natomiast prawie k-pokolorować l-cyklowo *multizbiór Z oznacza k-pokolorować l-cyklowo pewien pozdbiór $Z' \subseteq Z$ tak, aby zbiór $Z \setminus Z'$ niepokolorowanych krawędzi był skojarzeniem grafu G.*

Ponieważ H jest 4-regularny, a zatem eulerowski, zawiera cykl Eulera. Cykl Eulera multigrafu H możemy rozbić na dwa rozłączne krawędziowo pokrycia cyklowe, które mogą zawierać cykle o długości 2. Widzimy więc, że multigraf H można łatwo 2-pokolorować 2-cyklowo.

Odtąd cykle długości 2 będziemy nazywać *podwójnymi krawędziami.*

Okazuje się, że większość trójkątów z multigrafu H można wyeliminować. Mówimy, że podgraf S multigrafu H można *wyeliminować* z H, jeśli istnieje multigraf J, który spełnia następujące warunki:

1. J nie zawiera żadnego podgrafu izomorficznego z S,
2. J ma mniej wierzchołków niż H,
3. jeśli J można 2-pokolorować 5-cyklowo, to H również.

Okazuje się, że trójkąty można eliminować całkiem sprawnie. W pracy [2] w Lematach 4 i 5 zostało pokazane jak wyeliminować z multigrafu dowolny trójkąt, który nie jest poniższej postaci:

1. trójkąt łączący wierzchołki a, b, c taki, że H zawiera podwójną krawędź między a i b i podwójną krawędź między b i c,
2. trójkąt łączący wierzchołki a, b, c taki, że każdy z wierzchołków a, b, c jest incydentny do jakiejś podwójnej kraędzi zawierającej dokładnie jeden z wierzchołków a, b, c.

Pierwszym krokiem algorytmu znajdującego podzbiór E' z Twierdzenia 4 jest właśnie eliminacja wszystkich możliwych typów trójkątów.

Z podwójnymi krawędziami również można sobie stosunkowo łatwo poradzić kolorując dwie krawędzie łączące dowolną parę wierzchołków na dwa różne kolory. Jednak, po takim kolorowaniu podwójnych krawędzi nie zawsze jest możliwe pokolorowanie reszty krawędzi tak, aby cały multigraf był 2-pokolorowany 3-cyklowo. Niektóre krawędzie będą musiały pozostać niepokolorowane.

Ponieważ kwadratów nie daje się tak łatwo eliminować z multigrafów jak trójkątów, w zamian są one *neutralizowane* - mówimy, że cykl c jest zneutralizowany, jeśli dwie krawędzie cyklu c są pokolorowane różnymi kolorami.

W pracy [2] opisany jest algorytm prawie 2-kolorujący 5-cyklowo multigraf H, który nie zawiera trójkątów, które można wyeliminować przy pomocy metody opisanej w Lematach 4 i 5. Algorytm ten najpierw neutralizuje wszystkie kwadraty, podwójne krawędzie oraz trójkaty dwóch opisanych wyżej typów. Następnie koloruje zachłannie resztę niepokolorowanych krawędzi tak, aby żaden wierzchołek nie miał trzech incydentnych krawędzi o tym samym kolorze.

Jeśli multigraf H udało się 2-pokolorować 5-cyklowo, obliczenie podzbioru E' z Twierdzenia 4 jest proste - z każdego monochromatycznego cyklu c wybieramy krawędź o najmniejszej wadze i dodajemy ją do E'. Ponieważ każdy monochromatyczny cykl ma długość co najmniej

5, waga tak skonsruowanego zbioru E' nie przewyższa $\frac{1}{5}w(H)$. Usunąwszy E' z H, w multigrafie nie pozostaje żaden monochromatyczny cykl i powstały multigraf jest 2-pokolorowany ścieżkowo.

Jeśli zaś multigraf H udało się jedynie prawie 2-pokolorować 5-cyklowo, znalezienie E' będzie wymagało konstrukcji pięciu rozłącznych krawędziowo zbiorów krawędzi. W multigrafie H jest przynajmniej jedna niepokolorowana krawedź. Dla ustalenia uwagi, załóżmy, że multigraf kolorujemy kolorami czerwonym i niebieskim. Ze względu na to, że kolorowanie jest zachłanne dowolna niepokolorowana krawędź $e = (u, v)$ musi mieć dwie czerwone krawędzie incydentne do u i dwie niebieskie krawędzie incydentne do v lub na odwrót. Załóżmy, że u ma dwie incydentne krawędzie do u. Oznacza to, że u ma również dokładnie jedną incydentną krawędź niebieską oraz v ma dokładnie jedną incydentną krawędź czerwoną. Czerwone krawędzie incydentne do u nazywamy *czerwonymi głowami* krawędzi e, natomiast czerwoną krawędź incydentną do v nazywamy *czerwonym ogonem* e. Analogicznie, każdą z niebieskich krawędzi incydentnych do v nazywamy *niebieską głową* e, a niebieską krawędź incydentną do u – *niebieskim ogonem* krawędzi e.

Zauważmy, że chcąc pokolorować niepokolorowaną krawędź na czerwono (odpowiednio niebiesko) musimy najpierw usunąć jedną z jej czerwonych (odp. niebieskich) głów. W algorytmie obliczającym zbiór E' konsruujemy pięć rozłącznych krawędziowo zbiorów R_1, R_2, B_1, B_2, $Blank$ odpowiadających pięciu fazom - dwóm czerwonym, dwóm niebieskim i jednej bezbarwnej. W i-tej fazie ($i \in \{1, 2\}$) czerwonej (niebieskiej) z multigrafu H usuwamy krawędzie należące do zbioru R_i (B_i), kolorujemy niepokolorowane krawędzie na czerwono (niebiesko) i otrzymujemy multigraf 2-pokolorowany ścieżkowo. W fazie bezbarwnej wyrzucamy z H krawędzie ze zbioru $Blank$ i również otrzymujemy multigraf 2-pokolorowany ścieżkowo. Widać więc, że zbiory R_1, R_2 zawierają po jednej czerwonej głowie każdej krawędzi niepokolorowanej i podobnie zbiory B_1, B_2 zawierają po jednej niebieskiej głowie każdej krawędzi niepokolorowanej. Dodatkowo z każdego cyklu monochromatycznego trzeba usunąć przynajmniej jedną krawędź.

Skonsruowawszy zbiory $R_1, R_2, B_1, B_2, Blank$ jako zbiór E' z Twierdzenia 4 wystarczy wybrać ten z nich, który ma najmniejszą wagę.

4.3.3 Skojarzenia z preferencjami

W problemach dotyczących skojarzeń z preferencjami dany jest graf nieskierowany, w którym część lub wszystkie wierzchołki mają preferencje dotyczące swoich sąsiadów. W przypadku skojarzeń z *jednostronnymi* preferencjami graf wejściowy $G = (A \cup P, E)$ jest dwudzielny i każdy wierzchołek a wyraża swoje preferencje przez przypisanie liczby naturalnej r, zwanej *rangą* każdej krawędzi (a, p) incydentnej do a. Im mniejszą liczbą naturalną r, tym wyższą rangę oznacza, czyli tym bardziej dany wierzchołek jest preferowany. W przypadku skojarzeń z *dwustronnymi* preferencjami graf wejściowy $G = (V, E)$ może być zarówno dwudzielny, jak i niedwudzielny. Każdej krawędzi (u, v) przypisane są dwie liczby, również zwane *rangami*, które odpowiadają temu, jak wierzchołek u jest postrzegany przez v oraz jak wierzchołek v jest oceniany przez u. Podobnie jak w przypadku jednostronnych skojarzeń z preferencjami, mniejsza liczba naturalna oznacza większą preferencję.

We wszystkich problemach związanych ze skojarzeniami z preferencjami celem jest obliczenie skojarzenia (lub b-skojarzenia) optymalizującego odpowiednio sformułowane kryterium uwzględniające preferencje wierzchołków.

Jednym z najwcześniej i najlepiej badanych problemów tego typu są skojarzenia stabilne, po raz pierwszy opisane w przełomowej pracy Gale'a i Shapley [17]. W roku 2012 Shapley i Roth otrzymali Nagrodę Nobla za prace obejmujące między innymi tę właśnie tematykę.

Skojarzenia z preferencjami pomimo prostego sformułowania mają liczne zastosowania w sytuacjach praktycznych, takich jak przydział kandydatów uniwersytetom, aplikantów posadom, domów kupcom itp.

Od strony matematycznej teoria dotycząca skojarzeń z preferencjami jest rozbudowana, a problemy tego typu mają częstokroć interesujące i eleganckie rozwiązania algorytmiczne.

Skojarzenia rango-maksymalne W problemie skojarzenia rango-maksymalnego dany jest graf dwudzielny $G = (A \cup P, E)$, w którym A oznacza zbiór aplikantów, P - posad oraz każda krawędź (a, p) ma rangę odpowiadającą temu, jak bardzo aplikant a jest zainteresowany posadą p. Mniejsza liczba oznacza większe zainteresowanie. Dopuszczalne są remisy tzn. dany aplikant a może tak samo oceniać kilka posad $p_1, p_2, \ldots, p_s$ i wtedy wszystkie krawędzie $(a, p_1), \ldots, (a, p_s)$ mają taką samą rangę. Zadanie polega na obliczeniu skojarzenia *rango-maksymalnego*, czyli takiego, w którym maksymalna liczba aplikantów otrzymuję posadę o randze 1 oraz pod tym warunkiem maksymalna liczba aplikantów otrzymuje posadę o randze 2 itd.

Problem skojarzenia rango-maksymalnego został sformułowany przez Irvinga w pracy [26]. Skojarzenia rango-maksymalne mają szereg zastosowań, m.in. przy przyporządkowywaniu posad aplikantom, studentów kursom lub projektom, recenzentów pracom konferencyjnym. Również w easychairze stosowany jest pewien wariant skojarzeń rango-maksymalnych.

Problem znajdowania skojarzenia rango-maksymalnego można dość łatwo zredukować do problemu znajdowania maksymalnego wagowo skojarzenia. Jego czas działania wynosi wtedy $O(r^2\sqrt{n}m \log n)$, jeśli zastosujemy algorytm Gabowa-Tarjana i gdzie r oznacza największą wartość rangi w grafie, lub $O(rn(m + n \log n))$ przy użyciu algorytmu Fredmana-Tarjana. Irving w swojej pracy [26] podał algorytm dla wersji problemu, gdy remisy nie są dozwolone, działający w czasie $O(c^2n^3)$, gdzie c oznacza maksymalną liczbę sąsiadów aplikanta. W pracy [27] podany został algorytm kombinatoryczny działający w czasie $O(\min(n, C\sqrt{n})m)$, gdzie C oznacza maksymalną wartość rangi w rozwiązaniu optymalnym. Algorytm ten wykorzystuje w istotny sposób rozkład Edmondsa-Gallai, który jest znanym twierdzeniem strukturalnym w teorii skojarzeń ([38]). Rozwiązanie z pracy [27] polega na sprowadzeniu obliczenia skojarzenia rango-maksymalnego do serii obliczeń największego (licznościowo) skojarzenia w odpowiednio konstruowanych grafach dwudzielnych - będących podgrafami wyjściowego grafu G.

W pracy [3] rozważana jest wersja pojemnościowa (ang. capacitated), w której każdy wierzchołek v grafu ma dodatkowo określoną pojemność $b(v) \in \mathcal{N}$, która oznacza maksymalną ilość wierzchołków jakie mogą być z nim skojarzone w rango-maksymalnym b-skojarzeniu. W wersji tej pojemności większe niż 1 mogą mieć zarówno aplikanci, jak i posady. Wersję opisaną w [8], w której tylko wierzchołki z jednego z dwóch zbiorów grafu dwudzielnego mogą mieć pojemności większe niż 1, można łatwo sprowadzić do wersji bez pojemności za pomocą tzw. klonowania. Klonowanie polega na dodaniu do grafu $b(v) - 1$ kopii wierzchołków v dla każdego wierzchołka v. Każdy wierzchołek będący kopią wierzchołka v ma takich samych sąsiadów jak v o rangach na krawędziach równych rangom swoich odpowiedników w grafie oryginalnym. Sztuczka z klonowaniem nie działa jeśli pojemności większe niż 1 są dozwolone po obu stronach partycji grafu dwudzielnego. Z tego powodu w [3] udowodniono uogólnienie rozkładu Edmondsa-Gallai na b-skojarzenia. Uogólnienie to jest interesujące niezależnie a nie tylko w kontekście problemów skojarzeń z preferencjami. Poza tym, rozwiązanie problemu z [3] jest nieco podobne do tego z [27]. Dodatkowo, w pracy [3] zostały podane szybsze algorytmy dla dwóch wariantów problemu skojarzenia popularnego.

Skojarzenia popularne Mając dany graf dwudzielny $G = (A \cup H, E)$, w którym A oznacza zbiór agentów, H - domów i w którym każda krawędź (a, p) ma rangę odpowiadającą poziomowi zainteresowania agenta a domem h, chcemy znaleźć skojarzenie *popularne* zdefiniowane poniżej. Dopuszczalne są remisy tzn. agent a może oceniać niektórych swych sąsiadów tak samo i wtedy rangi krawędzi łączących agenta a z tymi domami są identyczne.

Mówimy, że agent a *woli* lub *preferuje* skojarzenie M' od M (i) jeśli a w skojarzeniu M jest nieskojarzony, natomiast w skojarzeniu M' jest lub (ii) jeśli preferuje dom przyporządkowany mu w skojarzeniu M' od domu przyporządkowanego mu w skojarzeniu M. Skojarzenie M' jest *bardziej popularne* od skojarzenia M, jeśli liczba agentów, która woli skojarzenie M' od M jest większa od liczby agentów preferujących skojarzenie M nad M'. Skojarzenie M nazywamy *popularnym*, jeśli nie istnieje skojarzenie M', które jest bardziej popularne od M.

Nie każdy graf dwudzielny dopuszcza istnienie skojarzenia popularnego. Wielomianowy algorytm sprawdzający, czy dany graf zawiera skojarzenie popularne i obliczający je, jeśli istnieje, został podany przez Abrahama i współpracowników w [7]. Manlove i Sng [42] rozszerzyli ten algorytm do wersji, w której każdy dom h może być przydzielony $b(h)$ agentom (czyli, każdy dom h ma określoną objętość $b(h)$, która może być większa od 1), natomiast każdy agent może (współ)posiadać co najwyżej jeden dom (każdy agent ma pojemność 1). Do rozszerzenia rozwiązania z [7] użyli wspomnianej wcześniej techniki klonowania. W pracy [4] rozważana jest wersja, w której zarówno każdy dom może być współdzielony przez więcej niż jednego agenta, jak i każdy agent może posiadać więcej niż jeden dom - innymi słowy, również każdy agent a ma określoną pojemność $b(a)$, która może być większa niż 1.

W przypadku gdy agenci mogą posiadać wiele domów nie jest jasne, jak zdefiniować relację preferowania, czyli jak dany agent ma porównywać dwa różne zbiory domów. W pracy [4] proponowane są opisane niżej dwa sposoby.

Dla danego b-skojarzenia M i agenta a niech $M(a)$ oznacza zbiór domów przydzielonych agentowi a w b-skojarzeniu M oraz niech s oznacza największą rangę nadaną jakiejkojwiek krawędzi w rozważanej instancji problemu. Każdemu zbiorowi domów, które mogą zostać przydzielone danemu agentowi a nadajemy *sygnaturę*.

Definicja 5 *Niech* $(y_1, y_2, \ldots, y_t)$ *oznacza ciąg rang wszystkich krawędzi* (a, h) *takich, że* $h \in$

$M(a)$ posortowany niemalejąco. Przez $sig_M(a)$ oznaczamy $b(a)$-krotkę $(x_1, x_2, \ldots, x_{b(a)})$ taką, że $x_i = y_i$ dla każdego i, $1 \leq i \leq t$ oraz $x_i = s + 1$ dla każdego $i > t$.

Wprowadzamy *porządek leksykograficzny* $\succ$ na sygnaturach w sposób następujący. Powiemy, że $(x_1, \ldots, x_d) \succ (y_1, \ldots, y_d)$, jeśli istnieje j takie, że (i) $1 \leq j \leq d$, (ii) dla każdego i, $1 \leq i \leq j-1$ zachodzi $x_i = y_i$ oraz (iii) $x_j < y_j$. Agent a *woli* lub *preferuje* b-skojarzenie M' od M, jeśli $sig'_M(a) \succ sig_M(a)$. Poza tym, popularne b-skojarzenie zdefiniowane jest w analogiczny sposób jak popularne skojarzenie.

Definiujemy również b-skojarzenia *popularne klanowo*. Podczas decydowania, czy dane skojarzenie lub b-skojarzenie M jest bardziej popularne od innego M', każdy agent ma dokładnie jeden głos, którego wartość wynosi odpowiednio 1 - jeśli preferuje on (b-)skojarzenie M, -1 - gdy prefereuje M' lub -1 - jeśli jest między nimi obojętny. W problemie b-skojarzenia *popularnego klanowo* każdy agent a ma liczbę głosów równą swojej objętości $b(a)$. W trakcie ustalania, czy b-skojarzenie M jest bardziej popularne niż b-skojarzenia M', każdy agent a porównuje najpierw najlepszy dom przypadający mu w b-skojarzeniu $M \setminus M'$ z najlepszym domem w $M' \setminus M$ i oddaje jeden głos o wartości odpowiednio $1, -1$ lub 0, następnie porównuje drugie pod względem najlepszości domy itd. Jeśli suma wszystkich w ten sposób oddanych głosów okaże się dodatnia, to znaczy to, że b-skojarzenie M jest bardziej popularne niż M'. Jeśli zaś suma ta będzie ujemna, to b-skojarzenie M' jest bardziej popularne niż M. W przeciwwnym przypadku żadne z tych dwóch b-skojarzeń nie jest bardziej popularne od drugiego.

W pracy [4] udowodniona została NP-trudność następujących problemów:

1. Stwierdzenie, czy dla danej instancji istnieje b-skojarzenie popularne nawet wtedy, gdy każda z krawędzi ma jedną z dwóch rang, każdy agent ma objętość co najwyżej 2 oraz każdy dom ma objętość 1. W szczególności rozwiązuje to problem otwarty postawiony w [42].

2. Stwierdzenie, czy dla danej instancji istnieje b-skojarzenie popularne klanowo nawet dla wersji, w której dopuszczalne są trzy rangi krawędzi, każdy agent ma objętość co najwyżej 3, każdy dom ma objętość 1 oraz nie występują remisy.

3. Stwierdzenie, czy dana instancja dopuszcza istnienie b-skojarzenia popularno klanowego nawet jeśli wszystkie krawędzie mają jedną z dwóch rang oraz każdy agent ma co najwyżej trzy incydentne krawędzie o randze 1, co najwyżej jedną incydentną krawędź o randze 2 i objętość co najwyżej 3.

Z drugiej strony zostały pokazane charakteryzacje b-skojarzeń popularnych i popularnych klanowo w terminach zakazanych ścieżek i cykli alternujących. Charakteryzacje te umożliwiają sprawdzenie w czasie wielomianowym, czy konkretne b-skojarzenie jest popularne lub popularne klanowo. Stanowią one również alternatywną i szybszą metodę sprawdzania, czy zwykłe skojarzenie jest popularne, gdyż stosując algorytm podany w [7] taka weryfikacja możliwa jest w czasie ($O(\sqrt{n}m)$, natomiast używając podejścia opisanego w [4] - w $O(m)$.

Ponadto w [4] podany jest wielomianowy algorytmy obliczający b-skojarzenie popularne klanowo, jeśli istnieje, dla instancji, w których wszystkie krawędzie mają jedną z dwóch rang, każdy agent ma objętość 2 i (i) albo nie ma remisów, albo (ii) remisy są dopuszczalne wśród krawędzi o randze 2. Algorytm ten korzysta z algorytmu obliczającego tzw. skojarzenie *dwupoziomowe* (zdefiniowane w [4]), który też jest zawarty w pracy [4].

Skojarzenia stabilne W problemie stabilnego skojarzenia, zwanego również w literaturze problemem stabilnego małżeństwa dany jest graf dwudzielny $G = (A \cup B, E)$, w którym zbiór A oznacza kobiety, zbiór B mężczyzn oraz każdy wierzchołek v ma listę preferencji L_v, która jest liniowym porządkiem na zbiorze sąsiadów wierzchołka v. Krawędź $(a, b) \in E$ taka, że $a \in A$ i $b \in B$ jest *blokująca* dla skojarzenia M grafu G, jeśli zachodzą następujące trzy warunki:

- $(a, b) \notin M$,
- wierzchołek a jest nieskojarzony w M lub woli wierzchołek b od wierzchołka $M(a)$ tzn. b poprzedza $M(a)$ na liście L_a,
- wierzchołek b jest nieskojarzony w M lub woli wierzchołek a od wierzchołka $M(b)$.

Zadanie problemu stabilnego skojarzenia polega na znalezieniu *stabilnego* skojarzenia, czyli takiego dla którego nie istnieje w grafie krawędź blokująca.

Gale i Shapley [17] pokazali, że skojarzenie stabilne istnieje dla każdego grafu dwudzielnego oraz podali elegancki liniowy algorytm je znajdujący. Algorytm ten polega na składaniu kolejnych propozycji przez mężczyzn kobietom. Każdy mężczyzna b składa propozycję kolejnym kobietom ze swojej listy preferencji, poczynając od kobiety najbardziej przez niego preferowanej. Kobieta akceptuje propozycję mężczyzny b, jeśli jest aktualnie nieskojarzona lub jeśli woli mężczyznę b od swojego aktualnego partnera b'. W tym drugim przypadku mężczyzna b' staje się wolny i kontynuuje składanie propozycji, chyba że złożył już propozycję każdej kobiecie ze swojej listy preferencji.

Na temat problemu stabilnego skojarzenia i algorytmu Gale'a-Shapley napisano setki prac i kilka książek.

Problem znajdowania stabilnego skojarzenia staje się bardziej skomplikowany, jeśli dozwalamy na istnienie remisów tzn. sytuacji, w których każdy wierzchołek v może oceniać dwóch lub więcej sąsiadów tak samo. Innymi słowy w wariantach, w których remisy są dozwolone, dla dowolnych dwóch sąsiadów u, w wierzchołka v, v albo woli u od w, albo w od u, albo jest między nimi obojętny. W wersji z remisami lista preferencji L_v każdego wierzchołka v to liniowy porządek na parami rozłącznych podzbiorach sąsiadów (remisach), przy czym każdy z sąsiadów v należy do jednego z tych podzbiorów oraz podzbiory mogą być jednoelementowe. W problemie stabilnego skojarzenia z remisami lub słabo stabilnego skojarzenia pojęcia krawędzi blokującej i (słabo) stabilnego skojarzenia są takie same jak w wersji bez remisów.

Dla dwóch sąsiadów v_1, v_2 wierzchołka u, zapis $v_1 \succ_u v_2$ oznacza, że wierzchołek u woli v_1 od v_2. Zapis $v_1 \succeq_u v_2$ oznacza, że wierzchołek u woli v_1 od v_2 lub jest między nimi obojętny.

W przypadku gdy remisy są dozwolone krawędź blokującą można również zdefiniować nieco inaczej. Prowadzi to do powstania dwóch nowych kryteriów stabilności i dwóch nowych wersji problemu stabilnego skojarzenia z remisami [25]:

1. problem silnie stabilnego skojarzenia - skojarzenie M jest *silnie stabilne*, jeśli nie istnieje krawędź je blokująca, przy czym w tej wersji problemu krawędź $(u, v) \notin M$ jest blokująca dla skojarzenia M, jeśli (i) u jest nieskojarzony w M lub $v \succ_u M(u)$ oraz (ii) v jest nieskojarzony w M lub $u \succeq_v M(v)$,
2. problem super stabilnego skojarzenia - skojarzenie M jest *super stabilne*, jeśli nie istnieje krawędź je blokująca, przy czym w tym wypadku krawędź $(u, v) \notin M$ jest blokująca dla skojarzenia M, jeśli (i) u jest nieskojarzony w M lub $v \succeq_u M(u)$ oraz (ii) v jest nieskojarzony w M lub $u \succeq_v M(v)$.

Spośród tych trzech wersji skojarzeń stabilnych, w których dozwolone są remisy, najbardziej badane były skojarzenia słabo stabilne.

Słabo stabilne skojarzenie również istnieje dla każdego grafu dwudzielnego. Jednak, w przeciwieństwie do instancji, w których nie ma remisów i kiedy to każde skojarzenie stabilne ma taką samą moc, słabo stabilne skojarzenia mogą mieć różne liczności.

Problem znajdowania największego licznościowo słabo stabilnego skojarzenia jest NP-trudny, co zostało udowodnione przez Manlove'a w [41]. W pracy [20] zostało z kolei pokazane, że problemu nie da się aproksymować ze współczynnikiem $\frac{21}{19}$, chyba że $P = NP$. Następnie, nieaproksymowalność problemu została wzmocniona przez Yanagisawę [**?**], który pokazał, że aproksymacja ze współczynnikiem $\frac{33}{29}$ jest NP-trudna. Ponadto wykazał on, że problemu nie da się aproksymować ze współczynnikiem $\frac{4}{3}$, jeśli przyjmiemy, że problem znajdowania najmniekszego pokrycia wierzchołkowego jest nieaproksymowalny ze współczynnikiem $2 - \epsilon$.

Ponieważ każde skojarzenie maksymalne (ze względu na zawieranie) jest co najwyżej dwa razy mniejsze od skojarzenia największego, każdy algorytm obliczający słabo stabilne skojarzenie ma współczynnik aproksymacji co najmniej 2 [41].

Lista algorytmów aproksymacyjnych dla problemu znajdowania największego licznościowo słabo stabilnego skojarzenia jest dość długa. Rozpoczyna ją algorytm $(2-c\frac{\log n}{n})$-aproksymacyjny podany przez Iwamę, Miyazaki i Okamoto [28] - c oznacza pewną dodatnią stałą. Następny wynik został uzyskany przez Iwamę, Miyazaki i Yamauchi [29], którzy podali algorytm $(2 - c\frac{1}{\sqrt{n}})$-aproksymacyjny, gdzie c oznacza dodatnią stałą nie większą niż $\frac{1}{4\sqrt{6}}$. Pierwszy algorytm o współczynniku będącym stałą mniejszą niż 2 został przedstawiony przez Iwamę, Miyazaki i Yamauchi w [30]. Ich algorytm osiąga aproksymację równą $1.875 = \frac{15}{8}$. Później, w roku 2008 Király podał liniowy algorytm $\frac{5}{3}$-aproksymacyjny [34], a w roku 2009 McDermid [43] przedstawił algorytm o współczynniku $\frac{3}{2}$ i czasie działania $O(n^{3/2}m)$. W roku 2009 w pracy [5] został przedstawiony prostszy i liniowy ($O(m)$) algorytm również osiągający współczynnik $\frac{3}{2}$. Poźniej na podstawie wcześniejszej wersji pracy [5] Király przedstawił jeszcze nieco inny wariant liniowego algorytmu $\frac{3}{2}$-aproksymacyjnego [35].

Istnieje podejrzenie, że uzyskanie współczynnika lepszego niż $\frac{3}{2}$ dla problemu znajdowania największego licznościowo słabo stabilnego skojarzenia może być trudne, co zostało pokazane w [24].

W pracy [5] oprócz liniowego algorytmu $\frac{3}{2}$-aproksymacyjnego obliczającego słabo stabilne skojarzenie, został podany również szybki $\frac{3}{2}$-algorytm aproksymacyjny znajdujący słabo stabilne b-skojarzenie.

W przeciwieństwie do skojarzeń (słabo) stabilnych, silnie stabilne skojarzenie nie istnieje w każdym grafie. Jednakże, znane są wielomianowe algorytmy obliczające silnie stabilne skojarzenie w grafie lub stwierdzające, że takie nie istnieje. Dla grafów dwudzielnych algorytmy takie zostały podane w [25], [39], [32].

Każdy z algorytmów z [25], [39], [32] oblicza skojarzenie optymalne dla kobiet lub optymalne dla mężczyzn. Dane skojarzenie silnie stabilne jest optymalne dla mężczyzn, jeśli każdy mężczyzna ma w nim możliwie najlepszą partnerkę, z jaką może być skojarzony w jakimkolwiek skojarzeniu silnie stabilnym. Definicja skojarzenia silnie stabilnego optymalnego dla kobiet jest analogiczna. Feder [15] postawił hipotezę, że znalezienie silnie stabilnego skojarzenia, które nie jest optymalne ani dla mężczyzn, ani dla kobiet może być NP-trudne.

W pracy [6] badany jest problem charakteryzacji zbioru wszystkich skojarzeń silnie stabilnych (w grafach dwudzielnych). Pytanie dotyczące istnienia takiej charakteryzacji zostało postawione już w 1989 roku w książce Gusfielda i Irvinga [18] jako jeden z dwunastu problemów otwartych i pozostawało otwarte do czasu pojawienia się [6]. Dodajmy tutaj, że zbiór wszystkich stabilnych skojarzeń w wersji bez remisów jest od dawna dobrze zbadany. Wiadomo, że tworzy on kratę i chociaż liczba stabilnych skojarzeń może być wykładnicza, istnieją zwarte reprezentacje zbioru wszystkich stabilnych skojarzeń, które można skonstruować w czasie $O(m^2)$ a nawet $O(m)$.

Manlove [40] pokazał, że zbiór wszystkich skojarzeń silnie stabilnych również tworzy kratę. W pracy [6] pokazane zostały dwie zwarte reprezentacje dla tego zbioru oraz algorytmy je konstruujące w czasie odpowiednio $O(nm^2)$ i $O(nm)$. Reprezentacje te są do pewnego stopnia analogiczne do reprezentacji zbioru skojarzeń stabilnych.

Jedna z reprezentacji zbioru skojarzeń stabilnych składa się z $O(m)$ elementów, z których każdy odpowiada jednej krawędzi grafu e i jest skojarzeniem stabilnym optymalnym dla mężczyzn wśród wszystkich skojarzeń stabilnych zawierających krawędź e. W przypadku skojarzeń silnie stabilnych konstruujemy reprezentację złożoną z $O(m)$ elementów, która dla każdej krawędzi e zawiera klasę skojarzeń silnie stabilnych równoważnych w pewien określony sposób dowolnemu skojarzeniu silnie stabilnemu optymalnemu dla mężczyzn wśród skojarzeń silnie stabilnych zawierających e. Obliczenie takiej klasy odbywa się przez elementarną redukcję do problemu obliczenia silnie stabilnego skojarzenia w odpowiednio zbudowanej instancji.

Drugą reprezentację zbioru skojarzeń stabilnych można otrzymać z różnic (tzw. rotacji) między kolejnymi skojarzeniami stabilnymi występującymi w maksymalnej sekwencji skojarzeń stabilnych rozpoczynającej się od skojarzenia optymalnego dla mężczyzn i kończącej na skojarzeniu optymalnym dla kobiet. Drugą reprezentację zbioru skojarzeń stabilnych można analogicznie stworzyć na podstawie różnic między kolejnymi klasami skojarzeń silnie stabilnych z maksymalnej sekwencji skojarzeń silnie stabilnych. Obliczenie maksymalnej sekwencji skojarzeń silnie stabilnych jest jednak bardziej skomplikowane niż w przypadku skojarzeń stabilnych i wymaga wypracowania nowych pomysłów. Druga reprezentacja zbioru skojarzeń silnie stabilnych budowana jest w czasie $O(nm)$ - takim samym jak obliczenie pojedynczego skojarzenia silnie stabilnego.

Wyniki pracy [6] obalają przy okazji hipotezę Federa.

4.4 Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo-badawczych

W pracy [27] podany został algorytm kombinatoryczny dla problemu skojarzeń rango-maksymalnych. Działa on w czasie $O(\min(n, C\sqrt{n})m)$, gdzie C oznacza maksymalną wartość rangi w rozwiązaniu optymalnym. Praca ta została już częściowo opisana wcześniej w autoreferacie podczas omawiania skojarzeń rango-maksymalnych.

Tematem pracy [32] są skojarzenia silnie stabilne. Zawiera ona algorytm, który dostając na wejściu graf dwudzielny z zakodowanymi listami preferencji wierzchołków, oblicza skojarzenie silnie stabilne lub stwierdza, że takie nie istnieje. Czas działania algorytmu wynosi $O(nm)$. Wcześniejszy algorytm podany w [39] dla tego problemu działał w czasie $O(m^2)$. W pracy [32] została wprowadzona technika bazująca na tzw. skojarzeniach poziomo-maksymalnych (ang. level-maximal matchings). W skrócie polega ona na tym, aby podczas szukania ścieżki powiększającej dla danego skojarzenia w pierwszej kolejności brać pod uwagę krawędzie później dodane do podgrafu, w którym liczona jest ścieżka powiększająca. Algorytm ten jest rozszerzony również do wersji, w której wierzchołki po jednej stronie grafu mogą mieć pojemności. W literaturze problem ten nosi nazwę problemu szpitali i rezydentów (ang. hospitals-residents problem).

Problem znajdowania minimalnej bazy cyklowej w grafie nieskierowanym G o nieujemnych wagach na krawędziach badany jest w pracy [33]. W problemie tym z każdym cyklem związany jest $\{0,1\}$-kowy wektor charakterystyczny a przestrzeń wektorowa nad ciałem Z_2 generowana przez te wektory to przestrzeń cyklowa grafu G. Zbiór cykli nazywany jest *bazą cyklową* G jeśli stanowi bazę przestrzeni cyklowej. *Minimalna baza cyklowa* to baza cyklowa o najmniejszej sumie wag krawędzi wchodzących w skład cykli należących do bazy cyklowej. W pracy [33] podano algorytm o czasie działania $O(m^2n+mn^2 \log n)$ dla tego problemu. Najlepszy wcześniej znany algorytm liczący minimalną bazę cyklową ma czas działania $O(m^\omega n)$, gdzie ω jest wykładnikiem w złożoności czasowej mnożenia macierzy.

Problem maksymalnego $(0, 1)$-komiwojażera w grafach nieskierowanych (Max $(0, 1)$-ATSP) jest wersją problemu maksymalnego komiwojażera, w której wszystkie krawędzie mają wagę 0 lub 1. Algorytm α-aproksymacyjny dla maksymalnego $(0, 1)$-komiwojażera można łatwo przekształcić w algorytm $(1 - \alpha)$-aproksymacyjny dla problemu minimalnego $(1, 2)$-komiwojażera zamieniając krawędzie o wadze 2 na krawędzie o wadze 0 [**?**]. Analogiczna redukcja problemu maksymalnego $(0, 1)$-komiwojażera do minimalnego $(1, 2)$-komiwojażera nie działa. W pracy [49] został podany kombinatoryczny algorytm $\frac{3}{4}$-aproksymacyjny dla problemu Max $(0, 1)$-ATSP. Dla grafów o parzystej liczbie wierzchołków algorytm ten działa w czasie $O(n^{1/2}m_1)$, gdzie m_1 oznacza liczbę krawędzi o wadze 1. Dla grafów o nieparzystej liczbie wierzchołków algorytm ten ma czas działania $O(n^{3/2}m_1)$. W zaprezentowanym rozwiązaniu zastosowano pomysł z półkrawędziami oraz opracowano nową liniową ($O(n)$) metodę kolorowania pewnego typu grafów. Algorytm $\frac{3}{4}$-aproksymacyjny dla tego problemu był już znany wcześniej [11]. Algorytm z [11] jest oparty o programowanie liniowe oraz ma dużo gorszy czas działania, jak również jest bardziej skomplikowany.

W pracach [45], [46], [47], [48] badany jest problem kafelkowania prostokątami. W dwuwymiarowej wersji tego problemu dana jest macierz $A = [a_{ij}]$ o wymiarach $n \times n$ i nieujemnych elementach oraz naturalna liczba p. Zadanie polega na podziale macierzy A na p rozłącznych prostokątnych macierzy, zwanych *kafelkami* tak, aby zminimalizować maksymalną wagę kafelka w podziale, gdzie wagę kafelka B definujemy jako sumę wartości jego elementów i oznaczamy $w(B)$. Naturalnym ograniczeniem dolnym na wartość rozwiązania optymalnego OPT jest $L = \max\{\frac{w(A)}{p}, \max\{a_{ij} : 1 \leq i, j \leq n\}\}$. Jest to jak dotąd jedyne znane i stosowane ograniczenie dolne dla tego problemu. W pracach [45], [46], [47] zostały przedstawione algorytmy aproksymacyjne dla dwuwymiarowej wersji problemu kafelkowania prostokątami o współczynnikach odpowiednio $2\frac{1}{3}, 2\frac{1}{4}$ oraz $2\frac{1}{8}$. Prace [46] i [47] wchodzą w skład mojej pracy doktorskiej, a [45] jest moją pracą magisterską. W [47] zostało pokazane, że współczynnik aproksymacji $2\frac{1}{8} = \frac{17}{8}$ jest najlepszym możliwym, jeśli obliczane rozwiązanie jest porównywane do ograniczenia dolnego L. W [48] rozważana jest wielowymiarowa wersja problemu kafelkowania prostokątami, dla którego pokazano algorytm aproksymacyjny o współczynniku $\frac{d}{2} + 1$ dla wersji d-wymiarowej, również optymalny ze względu na zastosowane ograniczenie dolne analogiczne do L. Warto zaznaczyć, że do konstrukcji algorytmu aproksymacyjnego dla wielowymiarowego kafelkowania prostokątami potrzebne było rozwinięcie nowych pomysłów i metod - te wypracowane przy badaniu wersji dwuwymiarowej były niewystarczające.

Literatura

[1] Katarzyna E. Paluch, Khaled M. Elbassioni, Anke van Zuylen: Simpler Approximation of the Maximum Asymmetric Traveling Salesman Problem. STACS 2012: 501-506

[2] Katarzyna E. Paluch, Marcin Mucha, Aleksander Mądry: A 7/9 - Approximation Algorithm for the Maximum Traveling Salesman Problem. APPROX-RANDOM 2009: 298-311

Pełna wersja: Katarzyna E. Paluch, Marcin Mucha, Aleksander Madry: A 7/9 - Approximation Algorithm for the Maximum Traveling Salesman Problem . CoRR abs/0812.5101 (2008)

[3] Katarzyna E. Paluch: Capacitated Rank-Maximal Matchings. CIAC 2013: 324-335

[4] Katarzyna E. Paluch: Popular and clan-popular b-matchings. Theor. Comput. Sci. 544: 3-13 (2014)

[5] Katarzyna E. Paluch: Faster and Simpler Approximation of Stable Matchings. Algorithms 7(2): 189-202 (2014)

Wersja wstępna: Katarzyna E. Paluch: Faster and simpler approximation of stable matchings. CoRR abs/0911.5660 (2009)

[6] Adam Kunysz, Katarzyna E. Paluch, Pratik Ghosal: Characterisation of Strongly Stable Matchings. SODA 2016: 107-119

[7] David J. Abraham, Robert W. Irving, Telikepalli Kavitha, Kurt Mehlhorn: Popular Matchings. *SIAM J. Comput.* 37(4): 1030-1045 (2007).

[8] David J. Abraham, Ariel Levavi, David Manlove, Gregg O'Malley: The Stable Roommates Problem with Globally-Ranked Pairs. WINE 2007: 431-444

[9] R.Bhatia: private communication

[10] Markus Bläser: An 8/13-approximation algorithm for the asymmetric maximum TSP. *J. Algorithms* 50(1): 23-48 (2004)

[11] Markus Bläser: A 3/4-Approximation Algorithm for Maximum ATSP with Weights Zero and One. APPROX-RANDOM 2004: 61-71

[12] Markus Bläser and Bodo Manthey: Two Approximation Algorithms for 3-Cycle Covers. APPROX 2002: 40-50

[13] Zhi-Zhong Chen, Yuusuke Okamoto, Lusheng Wang: Improved deterministic approximation algorithms for Max TSP. *Information Processing Letters,* 95, 2005, 333-342

[14] Zhi-Zhong Chen, Lusheng Wang: An Improved Approximation Algorithm for the Bandpass-2 Problem. COCOA 2012: 188-199

[15] T. Feder, *Stable Networks and Product Graphs*, Stanford University, the American Mathematical Society, (1990), pp. 148.

[16] Marshall L. Fisher, George L. Nemhauser, Laurence A. Wolsey: An Analysis of Approximations for Finding a Maximum Weight Hamiltonian Circuit. *Operations Research 27(4):* 799-809 (1979)

[17] David Gale, Lloyd S. Shapley: College admissions and the stability of marriage, *American Mathematical Monthly,* 69 (1962) 9-15.

[18] Dan Gusfield and Robert W. Irving: *The Stable marriage problem - structure and algorithms*, Foundations of computing series,MIT Press, (1989)

[19] Magnús M. Halldórsson, Robert W. Irving, Kazuo Iwama, David Manlove, Shuichi Miyazaki, Yasufumi Morita, Sandy Scott: Approximability results for stable marriage problems with ties. *Theor. Comput. Sci.* 306(1-3): 431-447 (2003)

[20] Magnús M. Halldórsson, Kazuo Iwama, Shuichi Miyazaki, Hiroki Yanagisawa: Improved approximation results for the stable marriage problem. *ACM Trans. Algorithms* 3(3) (2007)

[21] Refael Hassin, Shlomi Rubinstein: An Approximation Algorithm for the Maximum Traveling Salesman Problem. *Inf. Process. Lett.* 67(3): 125-130 (1998)

[22] Refael Hassin, Shlomi Rubinstein: Better Approximations for Max TSP. *Information Processing Letters,* 75, 2000, 181-186

[23] Refael Hassin and Shlomi Rubinstein: An approximation algorithm for maximum triangle packing. *Discrete Applied Mathematics,* 154 (2006), 971–979

[24] Chien-Chung Huang, Kazuo Iwama, Shuichi Miyazaki, Hiroki Yanagisawa: A Tight Approximation Bound for the Stable Marriage Problem with Restricted Ties. APPROX-RANDOM 2015: 361-380

[25] Robert W. Irving: Stable Marriage and Indifference, *Discrete Applied Mathematics,* 48, 3 (1994), pp. 261–272

[26] Robert W. Irving. Greedy matchings. Technical report TR-2003-136, University of Glasgow, April 2003

[27] Robert W. Irving, Telikepalli Kavitha, Kurt Mehlhorn, Dimitrios Michail, Katarzyna E. Paluch: Rank-maximal matchings. *Transactions on Algorithms* 2(4): 602-610 (2006)

[28] Kazuo Iwama, Shuichi Miyazaki, Kazuya Okamoto: A $(2 - c\frac{\log n}{n})$-Approximation Algorithm for the Stable Marriage. SWAT 2004: 349-361

[29] Kazuo Iwama, Shuichi Miyazaki, Naoya Yamauchi: A $(2 - c\frac{1}{\sqrt{(n)}})$-Approximation Algorithm for the Stable Marriage Problem. ISAAC 2005: 902-914

[30] Kazuo Iwama, Shuichi Miyazaki, Naoya Yamauchi: A 1.875 - approximation algorithm for the stable marriage problem. SODA 2007: 288-297.

[31] Haim Kaplan, Moshe Lewenstein, Nira Shafrir, and Maxim Sviridenko: Approximation algorithms for asymmetric tsp by decomposing directed regular multigraphs. *J. ACM*, 52(4):602–626, 2005. Preliminary version appeared in FOCS'03.

[32] Telikepalli Kavitha, Kurt Mehlhorn, Dimitrios Michail, Katarzyna E. Paluch: Strongly stable matchings in time $O(nm)$ and extension to the hospitals-residents problem. *ACM Trans. Algorithms* 3(2) (2007)

[33] Telikepalli Kavitha, Kurt Mehlhorn, Dimitrios Michail, Katarzyna E. Paluch: An $\tilde{O}(m^2 n$ Algorithm for Minimum Cycle Basis of Graphs. *Algorithmica* 52(3): 333-349 (2008)

[34] Zoltan Király: Better and Simpler Approximation Algorithms for the Stable Marriage Problem, *Algorithmica* 60(1) (2011) 3-20

[35] Zoltan Király: Linear Time Local Approximation Algorithm for Maximum Stable Marriage. *Algorithms* 6(3): 471-484 (2013)

[36] S. Rao Kosaraju, James K. Park, and Clifford Stein. Long tours and short superstrings (preliminary version). FOCS 1994: 166–177

[37] Moshe Lewenstein and Maxim Sviridenko: A 5/8 approximation algorithm for the maximum asymmetric tsp. *SIAM J. Discrete Math.*, 17(2):237–248, 2003

[38] L.Lovasz, M. D.Plummer. Matching Theory. 1986.

[39] David F. Manlove: *Stable marriage with ties and unacceptable partners*, University of Glasgow, Department of Computing Science , TR-1999-29, (1999).

[40] David F. Manlove, The structure of stable marriage with indifference, *Discrete Applied Mathematics,* 122,1-3, (2002), pp. 167–181.

[41] David Manlove, Robert W. Irving, Kazuo Iwama, Shuichi Miyazaki, Yasufumi Morita: Hard variants of stable marriage. *Theor. Comput. Sci.* 276(1-2): 261-279 (2002)

[42] David Manlove, Colin T. S. Sng: Popular Matchings in the Capacitated House Allocation Problem. ESA 2006: 492-503

[43] Eric McDermid: A 3/2-Approximation Algorithm for General Stable Marriage. ICALP 2009: 689-700

[44] Marcin Mucha: Lyndon words and short superstrings. SODA 2013: 958-972

[45] Krzysztof Loryś, Katarzyna E. Paluch: Rectangle tiling. APPROX 2000: 206-213

[46] Krzysztof Loryś, Katarzyna E. Paluch: New approximation algorithm for RTILE problem. *Theor. Comput. Sci.* 2-3(303): 517-537 (2003)

[47] Katarzyna E. Paluch: A 17/8-Approximation Algorithm for Rectangle Tiling. ICALP 2004: 1054-1065

[48] Katarzyna E. Paluch: A New Approximation Algorithm for Multidimensional Rectangle Tiling. ISAAC 2006: 712-721

[49] Katarzyna E. Paluch: Maximum ATSP with Weights Zero and One via Half-Edges. WAOA 2015: 25-34

[50] Katarzyna E. Paluch: Better Approximation Algorithms for Maximum Asymmetric Traveling Salesman and Shortest Superstring. CoRR abs/1401.3670 (2014)

[51] Szymon Dudycz, Jan Marcinkowski, Katarzyna E. Paluch, Bartosz Rybicki: A 4/5 - Approximation Algorithm for the Maximum Traveling Salesman Problem. CoRR abs/1512.09236 (2015)

[52] Christos H. Papadimitriou and Mihalis Yannakakis: The traveling salesman problem with distances one and two. *Mathematics of Operations Research*, 18:1–11, 1993

[53] Jorma Tarhio and Esko Ukkonen: A greedy approximation algorithm for constructing shortest common superstrings. *Theor. Comput. Sci.*, 57:131–145, 1988

[54] A.I. Serdyukov: An Algorithm with an Estimate for the Traveling Salesman Problem of Maximum (in Russian). Upravlyaemye Sistemy, 25 (1984):80-86

[55] Alexander Schrijver: Nonbipartite Matching and Covering. In: Combinatorial Optimization, Volume *A*, 520-561, Springer 2003

[56] Zhong Sichen, Lu Zhao, Yan Liang, Mohammadzaman Zamani, Robert Patro, Rezaul Chowdhury, Esther M. Arkin, Joseph S. B. Mitchell, Steven Skiena: Optimizing Read Reversals for Sequence Compression - (Extended Abstract). WABI 2015: 189-202

[57] Weitian Tong, Randy Goebel, Tian Liu, Guohui Lin: Approximation Algorithms for the Maximum Multiple RNA Interaction Problem. COCOA 2013: 49-59

[58] Sundar Vishwanathan: An Approximation Algorithm for the Asymmetric Travelling Salesman Problem with Distances One and Two. *Inf. Process. Lett.* 44(6): 297-302 (1992)

[59] Oliver Vornberger: Easy and hard cycle covers, preprint, Universität Paderborn, Paderborn, 1980.

[60] H.Yanagisawa: Approximation algorithms for stable marriage problems, PhD thesis, Kyoto University, Graduate School of Informatics, 2007

K. Paluch