AUTOREFERAT

KRZYSZTOF KRUPIŃSKI

0. Podstawowe informacje

Miejsce pracy: Instytut Matematyczny, Uniwersytet Wrocławski
Pl. Grunwaldzki 2/4, 50-384 Wrocław
E-mail: kkrup@math.uni.wroc.pl

Zatrudnienie
2011- : Adiunkt z habilitacją, Uniwersytet Wrocławski
2005-2011: Adiunkt, Uniwersytet Wrocławski
2005-2008: Visiting Assistant Professor (postdoc), University of Illinois at Urbana-Champaign, USA
2004-2005: Roczne stanowisko adiunkta dla młodych naukowców w Instytucie Matematycznym PAN

Edukacja, stopnie i tytuły
2011: Habilitacja, Uniwersytet Wrocławski
2004: Doktorat (promotor: prof. dr hab. Ludomir Newelski), Uniwersytet Wrocławski
2000-2004: Studia doktoranckie z matematyki, Uniwersytet Wrocławski
2000: Tytuł magistra matematyki, Uniwersytet Wrocławski
1995-2000: Studia na Wydziale Matematyki i Informatyki na Uniwersytecie Wrocławskim (kierunek: matematyka, specjalność teoretyczna)

1. Lista publikacji

[1] K. Krupiński, L. Newelski, *On bounded type definable equivalence relations*, Notre Dame Journal of Formal Logic (43), 231-242, 2002.
[2] K. Krupiński, *Products of finite abelian groups as profinite groups*, Journal of Algebra (288), 556-582, 2005.
[3] K. Krupiński, *Abelian profinite groups*, Fundamenta Mathematicae (185), 41-59, 2005.
[4] T. Blossier, K. Krupiński, *A special thin type*, Illinois Journal of Mathematics (49), 281-290, 2005.
[5] K. Krupiński, *Profinite structures interpretable in fields*, Annals of Pure and Applied Logic (142), 19-54, 2006.
[6] K. Krupiński, F. Wagner, *Small profinite groups and rings*, Journal of Algebra (306), 494-506, 2006.
[7] C. Ealy, K. Krupiński, A. Pillay, *Superrosy dependent groups having finitely satisfiable generics*, Annals of Pure and Applied Logic (151), 1-21, 2008.

[8] K. Krupiński, *Fields interpretable in rosy theories*, Israel Journal of Mathematics (175), 421-444, 2010.
[9] K. Krupiński, *Fields interpretable in superrosy groups with NIP (the non-solvable case)*, Journal of Symbolic Logic (75), 372-386, 2010.
[10] K. Krupiński, *Some model theory of Polish structures*, Transactions of the American Mathematical Society (362), 3499-3533, 2010.
[11] K. Krupiński, *Generalizations of small profinite structures*, Journal of Symbolic Logic (75), 1147-1175, 2010.
[12] K. Krupiński, A. Pillay, *On stable fields and weight*, Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu (10), 349-358, 2011.
[13] K. Krupiński, *On relationships between algebraic properties of groups and rings in some model-theoretic contexts*, Journal of Symbolic Logic (76), 1403-1417, 2011.
[14] K. Krupiński, *On ω-categorical groups and rings with NIP*, Proceedings of the American Mathematical Society (140), 2501-2512, 2012.
[15] J. Dobrowolski, K. Krupiński, *On ω-categorical, generically stable groups*, Journal of Symbolic Logic (77), 1047-1056, 2012.
[16] J. Dobrowolski, K. Krupiński, *On ω-categorical, generically stable groups and rings*, Annals of Pure and Applied Logic (164), 802-812, 2013.
[17] K. Krupiński, F. Wagner, *Small, nm-stable compact G-groups*, Israel Journal of Mathematics (194), 907-933, 2013.
[18] K. Krupiński, P. Tanović, F. Wagner, *Around Podewski's conjecture*, Fundamenta Mathematicae (222), 175-193, 2013.
[19] K. Krupiński, A. Pillay, S. Solecki, *Borel equivalence relations and Lascar strong types*, Journal of Mathematical Logic (13), 1350008 (37 pages), 2013.
[20] J. Dobrowolski, K. Krupiński, *Locally finite profinite rings*, Journal of Algebra (401), 161-178, 2014.
[21] T. Gogacz, K. Krupiński, *On regular groups and fields*, Journal of Symbolic Logic (79), 826-844, 2014.
[22] K. Krupiński, *Superrosy fields and valuations*, Annals of Pure and Applied Logic (166), 342-357, 2015.
[23] K. Krupiński, T. Rzepecki, *Smoothness of bounded invariant equivalence relations*, Journal of Symbolic Logic, 31 stron, przyjęta.
[24] J. Gismatullin, K. Krupiński, *On model-theoretic connected components in some group extensions*, 41 stron, wysłana.
[25] K. Krupiński, A. Pillay, *Generalized Bohr compactification and model-theoretic connected components*, 36 stron, wysłana.
[26] K. Krupiński, A. Pillay, T. Rzepecki, *Topological dynamics and complexity of strong types*, 51 stron, wysłana.

Moja rozprawa doktorska, ukończona i obroniona w 2004 roku, napisana była na bazie prac [2], [3] i [5]. Rozprawa habilitacyjna składała się z prac [7], [8] i [9]; złożyłem ją w 2010 roku, a kolokwium habilitacyjne odbyło się w roku 2011.

2. Ogólne wprowadzenie

Moje zainteresowania matematyczne koncentrują się wokół teorii modeli – gałęzi logiki matematycznej.

We współczesnej teorii modeli można wyróżnić kilka nurtów. Klasycznym nurtem jest *"czysta" teoria modeli*, zajmująca się badaniem modeli pewnych ogólnych klas teorii pierwszego rzędu, w szczególności obliczaniem liczby (z dokładnością do izomorfizmu) modeli danej teorii, analizą ich struktury oraz bardziej technicznymi zagadnieniami, takimi jak studiowanie własności różnych wariantów pojęcia forkingowej niezależności. Najgłębsze wyniki w czystej teorii modeli uzyskano dla tzw. teorii stabilnych (była to teoria klasyfikacji rozwinięta przez Shelaha w latach siedemdziesiątych ubiegłego wieku oraz geometryczna teoria stabilności rozwinięta w latach osiemdziesiątych przez Hrushovskiego, Pillaya, Zilbera i innych). W ostatnich latach wielu teoriomodelowców pracuje nad rozszerzaniem metod teorii stabilności do szerszych klas teorii (np. do teorii prostych, NIP, NTP_2 czy różanych).

Kolejnym nurtem jest *"algebraiczna" teoria modeli*, która naturalnie i silnie wiąże teorię modeli z algebrą. Można tu wyróżnić dwa kierunki badań. Celem pierwszego jest klasyfikowanie klasycznych struktur algebraicznych (np. grup i ciał) spełniających pewne naturalne teoriomodelowe założenia; można powiedzieć, że jest to teoria klasyfikacji ograniczona do struktur algebraicznych. Celem drugiego kierunku badań jest rozwijanie teorii modeli konkretnych struktur algebraicznych (np. grup abelowych czy ciał algebraicznie domkniętych), tzn. opisywanie zbiorów definiowalnych, przestrzeni typów, forkingu, itd. oraz stosowanie tych rozważań do czysto algebraicznych lub teorioliczbowych problemów.

Jednymi z najbardziej spektakularnych zastosowań geometrycznej teorii stabilności i algebraicznej teorii modeli w geometrii diofantycznej są dowody hipotezy Mordela-Langa [Hr1] oraz Manina-Mumforda [Hr2] podane przez Hrushovskiego.

Innych ważnym nurtem jest *o-minimalność*. Przypomnijmy, że struktura *o-minimalna* to struktura liniowo uporządkowana, której każdy definiowalny podzbiór jest skończoną sumą przedziałów i punktów; teoria jest *o-minimalna*, gdy jej modele są o-minimalne. Motywacją jest tu możliwość stosowania teoriomodelowych idei do obiektów "analitycznych", np. do uporządkowanego ciała liczb rzeczywistych (które jest najbardziej klasycznym przykładem struktury o-minimalnej) i w konsekwencji do geometrii rzeczywistej. Jak zostało wyżej wspomniane różne idee z teorii stabilności stosują się w szerszych klasach teorii. Tak jest również w przypadku teorii o-minimalnych (mimo że wszystkie one są niestabilne), jednak zazwyczaj używając odmiennych technik, typowych dla o-minimalności. Jednym z najbardziej spektakularnych zastosowań o-minimalności jest dowód hipotezy André-Orta podany przez Pilę [Pi].

W ostatnim czasie coraz większego znaczenia nabierają różnorakie *metody topologiczne* w teorii modeli. Można tu wyróżnić stosowanie pojęć i metod dynamiki topologicznej do badania grup definiowalnych (zainicjowane przez Newelskiego) oraz do badania grup automorfizmów struktur pierwszego rzędu. Logika ciągła i teoria modeli struktur metrycznych (z głównym wkładem Ben-Yaacova) prowadzi do ciekawych związków teorii modeli z topologią i analizą funkcjonalną. Pozwolę sobie zakończyć stwierdzeniem, że badanie wprowadzonych przeze mnie struktur polskich prowadzi do nowych związków teorii modeli, topologii, deskryptywnej teorii mnogości, teorii grup i (na co mam nadzieję na podstawie moich ostatnich przemyśleń) dynamiki topologicznej.

3. Opis badań naukowych

Maje badania naukowe dotyczą związków teorii modeli z algebrą (głównie teorią grup, ciał i pierścieni), topologią, abstrakcyjną dynamiką topologiczną oraz deskryptywną teorią mnogości.

Niniejszy rozdział podzieliłem na kilka tematycznych podrozdziałów, w których omawiam najważniejsze aspekty moich prac.

Za moje główne osiągnięcia uważam:

- małe struktury polskie, które wprowadziłem i rozwijałem w pracach [10], [13], [17] i [20], omówione w podrozdziale 3.2,
- nowe twierdzenia na temat grup i pierścieni ω-kategorycznych zawarte w pracach [13], [14], [15] i [16] i omówione w podrozdziale 3.3,
- wkład w rozwój metod dynamiki topologicznej w teorii modeli oraz zastosowania i związki z teoriomodelowymi spójnymi składowymi i ze złożonością ograniczonych, niezmienniczych relacji równoważności; materiał ten zawarty jest w pracach [19], [23], [24], [25], [26] i omówiony został w podrozdziałach 3.8 oraz 3.9.

Warto tu również wspomnieć pracę [18], w której podaliśmy pełną klasyfikację minimalnych grup abelowych posiadających definiowalny porządek z nieskończonym łańcuchem i stosując ją zredukowaliśmy znaną hipotezę Podewskiego (mówiącą, że każde ciało minimalne jest algebraicznie domknięte) do pewnej bardzo szczególnej sytuacji, o której przypuszczamy, że nie może się zdarzyć. W pracy [12] poczyniliśmy pewien postęp dotyczący znanej hipotezy, że każde ciało stabilne jest rozdzielczo domknięte, dowodząc jej dla ciał wagi 1. Ponadto mam istotny wkład w rozwój struktur proskończonych (w mojej rozprawie doktorskiej i późniejszych publikacjach) oraz w badaniach grup i ciał różanych (w mojej rozprawie habilitacyjnej i ostatnio opublikowanej pracy [22]). Zostało to dokładniej omówione w poniższych podrozdziałach.

3.1. **Małe struktury proskończone.** W niniejszym podrozdziale omówię prace [2], [3], [5] (czyli zawartość mojej rozprawy doktorskiej) oraz [6] i [11] (prace opublikowane między doktoratem i habilitacją).

Struktury proskończone, w szczególności grupy proskończone rozważane jako struktury proskończone, zostały wprowadzone przez Newelskiego w [Ne1, Ne2].

Struktura proskończona to para $(X, Aut^*(X))$, gdzie X jest przestrzenią proskończoną (będącą granicą odwrotną przeliczalnego systemu skończonych przestrzeni dyskretnych), a grupa $Aut^*(X)$ (zwana *grupą strukturalną*) jest domkniętą podgrupą grupy homeomorfizmów X zachowujących wyróżniony system odwrotny. *Grupa proskończona* traktowana jako struktura proskończona to granica odwrotna grup skończonych wraz z grupą strukturalną składającą się z automorfizmów. Mówimy, że grupa strukturalna $Aut^*(X)$ struktury [grupy] proskończonej X jest *standardowa*, gdy jest ona grupą wszystkich homeomorfizmów [automorfizmów topologicznych] X zachowujących wyróżniony system odwrotny. Strukturę proskończoną $(X, Aut^*(X))$ nazywamy *małą*, gdy dla każdego naturalnego $n > 0$ jest tylko przeliczalnie wiele orbit na $X^n = X \times \cdots \times X$ względem działania grupy $Aut^*(X)$.

Moją główną motywacją, by rozważać struktury proskończone, jest fakt, że stwarzają one możliwość stosowania teoriomodelowych idei do czysto topologicznych obiektów. Z drugiej zaś strony, pojęcie interpretowalności struktury proskończonej w teorii pozwala uzyskać informacje na temat teorii na podstawie informacji na temat struktur proskończonych.

Newelski rozwinął teorię modeli małych struktur proskończonych przez analogię do geometrycznej teorii stabilności [Ne1, Ne2]. W szczególności wprowadził on pojęcia m-niezależności, $\mathcal{M}$-rangi, m-stabilności oraz m-normalności jako analogony pojęć forkingowej niezależności, U-rangi Lascara, superstabilności oraz 1-bazowania.

Wadą teorii rozwiniętej przez Newelskiego był brak ciekawych, konkretnych przykładów małych struktur proskończonych. Przypomnijmy, że każda struktura proskończona interpretowalna w małej teorii pierwszego rzędu też jest mała, co generuje całą klasę przykładów i jest jedną z motywacji do badania małych struktur proskończonych, jednak wciąż istotnym celem było znalezienie interesujących, konkretnych przykładów małych struktur proskończonych, a jeszcze bardziej – małych grup proskończonych.

Tak więc głównym celem prac [2] i [3] było znalezienie przykładów małych grup proskończonych. W [3] udowodniliśmy, że każda abelowa grupa proskończona skończonego wykładnika, będąca granicą odwrotną systemu indeksowanego liczbami naturalnymi i rozważana ze standardową grupą strukturalną jest mała, m-normalna i m-stabilna. W [2] scharakteryzowaliśmy, które produkty skończonych grup abelowych ze standardowymi grupami strukturalnymi odpowiadającymi różnym systemom odwrotnym są małe. Ponadto pokazaliśmy, że małe grupy tego typu są m-normalne (odpowiadając na pytanie Newelskiego dla rozważanych przez nas grup).

W [6] wprowadziliśmy pojęcie słabej interpretowalności i pokazaliśmy, że struktury proskończone interpretowalne w ciałach rozdzielczo domkniętych pokrywają się ze strukturami proskończonymi słabo interpretowalnymi w ciałach algebraicznie domkniętych. Opisaliśmy też teoriociałowe konstrukcje takich struktur i znaleźliśmy ścisły związek naszych rozważań z odwróconym problemem Galois.

Główna hipoteza Newelskiego na temat małych grup proskończonych mówi, że mają one otwartą podgrupę abelową. W [6] badaliśmy strukturę małych pierścieni proskończonych. Postawiliśmy hipotezę, że mają one otwarty ideał nilpotentny (tzn. istnieje n, takie że iloczyn dowolnych n elementów ideału jest równy 0). Główne twierdzenie pracy [6] mówi, że mają one otwarty ideał, który jest nil skończonego nilwykładnika (tzn. istnieje n, takie że n-ta potęga dowolnego elementu ideału wynosi 0). Udowodniliśmy też, że jeśli nasza hipoteza jest prawdziwa, to każda rozwiązalna, mała grupa proskończona ma otwartą podgrupę nilpotentną (co jest ważną otwartą częścią hipotezy Newelskiego). Dla pierścieni m-stabilnych pokazaliśmy nawet więcej niż mówi nasza hipoteza. Mianowicie, każdy mały, m-stabilny pierścień proskończony ma otwarty ideał zerowy (tzn. mnożenie obcięte do ideału jest funkcją zerową). Używając podobnych argumentów, uzyskaliśmy również nowy strukturalny wynik na temat ω-kategorycznych pierścieni superprostych (patrz podrozdział 3.3).

Motywacją do napisania pracy [11] był fakt, że założenie małości w istotny sposób ogranicza klasę ciekawych przykładów struktur proskończonych. Ponieważ kluczową konsekwencją założenia małości jest istnienie m-niezależnych rozszerzeń, naturalnym celem było zbadanie, czy ta własność (zamiast małości) jest wystarczająca do rozwinięcia interesującej teorii oraz czy istnieją ciekawe przykłady struktur o tej własności, które nie są małe. W [11] rozważaliśmy nie tylko struktury proskończone, lecz również ogólniejszą klasę *struktur zwartych*, czyli par (X, G), gdzie X jest zwartą przestrzenią metryczną, a G – zwartą grupą działającą na X wiernie i w sposób ciągły. Struktury zwarte spełniające istnienie m-niezależnych rozszerzeń nazwaliśmy *e-strukturami zwartymi*. Podaliśmy ogólną metodę konstruowania struktur zwartych i przy jej użyciu skonstruowaliśmy klasę przykładów e-struktur zwartych [oraz proskończonych], które nie są małe. Opisaliśmy topologiczne własności e-struktur zwartych, co pozwoliło nam zaadaptować dowody różnych twierdzeń o małych strukturach proskończonych do przypadku e-struktur zwartych. W szczególności zauważyliśmy, że zachodzi tu wariant twierdzenia o konfiguracji grupowej. Udowodniliśmy również, że w m-stabilnej e-strukturze zwartej każda orbita jest dominacyjnie równoważna (ang. *equidominant*) z produktem orbit m-regularnych, co jest nowe nawet dla małych struktur proskończonych. Znaleźliśmy też pojęcie interpretowalności struktur zwartych w teoriach pierwszego rzędu i pokazaliśmy, że każda struktura zwarta jest interpretowalna w pewnej teorii.

3.2. **Małe struktury polskie.** W niniejszym podrozdziale omówię pracę [10] (opublikowaną przed habilitacją, ale niezawartą w rozprawie habilitacyjnej) oraz prace [17] i [20] (opublikowane po habilitacji). Ten cykl prac uważam za jedno z moich głównych osiągnięć. Wspomnę też pracę [13] (opublikowaną po habilitacji) zawierającą przydatne twierdzenia tłumaczące pewne własności grup na odpowiadające im własności pierścieni i vice versa. Twierdzenia te stosują się w różnych sytuacjach, w szczególności w kontekście małych struktur polskich.

Już w czasie pracy nad małymi strukturami proskończonymi przypuszczałem, że rozważany kontekst powinno dać się rozszerzyć do ciekawszych obiektów matematycznych niż przestrzenie proskończone. Moją ogólną motywacją stała się chęć stworzenia możliwości stosowania idei i technik z teorii modeli w analizie interesujących obiektów topologicznych.

W [10] zdefiniowaliśmy *struktury polskie* jako pary (X, G), gdzie G jest grupą polską działającą na zbiorze X wiernie i tak, że stabilizator każdego punktu jest domkniętą podgrupą G. Mówimy, że (X, G) jest *mała*, gdy dla każdego naturalnego $n > 0$ jest tylko przeliczalnie wiele orbit na X^n względem działania grupy G.

Przykładami struktur polskich są struktury zwarte (w szczególności proskończone) oraz, ogólniej, G-przestrzenie polskie i G-przestrzenie borelowskie. Typowym topologicznym przykładem struktury polskiej jest dowolna zwarta przestrzeń metryczna X wraz z grupą $G := Homeo(X)$ wszystkich homeomorfizmów X, wyposażoną w topologię zwarto-otwartą. Okazuje się, że nawet gdy żądamy małości, wciąż pozostaje wiele ciekawych przykładów. Oprócz małych struktur proskończonych typowymi przykładami małych struktur polskich są różne zwarte przestrzenie metryczne z grupą wszystkich homeomorfizmów, np. $(S^n, Homeo(S^n))$, $(I^\omega, Homeo(I^\omega))$ oraz $(P, Homeo(P))$ (gdzie P jest pseudo-łukiem) są małe na mocy [9]; uniwersalne dendryty z pełną grupą hoemomorfizmów są małe na mocy [Ca]. Innym źródłem przykładów są grupy topologiczne. Mianowicie każda zwarta grupa metryczna wraz z grupą $G := Aut(H)$ wszystkich automorfizmów topologicznych jest strukturą polską, ale nie musi być strukturą proskończoną, nawet wtedy, gdy H jest grupą proskończoną (bo $Aut(H)$ jest polska, ale niekoniecznie zwarta). W [10] i [17] znaleźliśmy przykłady grup proskończonych H, dla których $(H, Aut(H))$ (lub (H, G) dla pewnej domkniętej podgrupy G grupy $Aut(H)$) jest małą strukturą polską, ale nie jest strukturą proskończoną. Kolejne przykłady znaleziono w [Do1]. Szerokie spektrum przykładów [małych] struktur polskich czyni je wartymi głębszej analizy.

W [10] wprowadziliśmy topologiczne pojęcie relacji niezależności, które nazwaliśmy nm-niezależnością (czytaj "non-meager" niezależnością) i udowodniliśmy, że przy założeniu małości ma ono kilka porządnych własności (jak forking w teoriach stabilnych) i że pokrywa się z m-niezależnością w strukturach zwartych. Dowód tranzytywności nm-niezależności jest nietrywialny i korzysta z deskryptywnej teorii mnogości. Używając nm-niezależności i jej własności, udowodniliśmy odpowiedniki pewnych podstawowych rezultatów z geometrycznej teorii stabilności w kontekście małych struktur polskich. W szczególności zdefiniowaliśmy $\mathcal{N}M$-rangę jako odpowiednik U-rangi Lascara i zauważyliśmy, że spełnia ona nierówności Lascara. W sytuacji gdy X jest wyposażone w topologię, $\mathcal{N}M$-ranga mierzy "topologiczną złożoność" orbit (pewne dodatkowe informacje na ten temat można znaleźć w [Do2]). Mówimy, że struktura polska (X, G) jest *nm-stabilna*, gdy $\mathcal{N}M(X) < \infty$.

W dalszej części pracy [10] analizowaliśmy grupy w kontekście struktur polskich. Wprowadziliśmy pojęcie orbity nm-generik i udowodniliśmy, że taka orbita istnieje w interesujących sytuacjach, np. w *G-grupach zwartych* zdefiniowanych jako struktury polskie (H, G), w których H jest zwartą grupą Hausdorffa i G działa na niej w sposób ciągły jako grupa automorfizmów. Do głównych rezultatów pracy należą strukturalne twierdzenia na temat małych G-grup zwartych. Motywowane one były hipotezą Newelskiego, mówiącą, że małe grupy proskończone są wirtualnie abelowe. Znaleźliśmy łatwe kontrprzykłady na uogólnienie tej hipotezy do małych G-grup zwartych. Z drugiej zaś strony udowodniliśmy, że mała, nm-stabilna G-grupa zwarta (H, G) jest wirtualnie rozwiązalna, a zakładając, że $\mathcal{N}M(H) < \omega$, jest ona nawet wirtualnie nilpotentna. Wreszcie w [17] wzmocniliśmy te rezultaty następująco: mała, nm-stabilna G-grupa zwarta jest wirtualnie nilpotentna, a zakładając, że $\mathcal{N}M(H) < \omega$, jest ona nawet wirtualnie abelowa. W [10] pokazaliśmy również, że uogólnienie hipotezy o $\mathcal{M}$-luce (mówiącej, że $\mathcal{M}$-ranga dowolnej orbity w małej strukturze proskończonej jest albo liczbą naturalną, albo symbolem ∞) do przypadku małych struktur polskich jest fałszywe. Znaleźliśmy nawet przykłady małych, nm-stabilnych G-grup zwartych o dowolnej przeliczalnej $\mathcal{N}M$-randze (co jest dość zaskakujące wobec faktu, że hipoteza o $\mathcal{M}$-luce została wcześniej udowodniona dla m-stabilnych grup proskończonych [Wa2]).

Kończąc dyskusję prac [10] i [17], chciałbym dodać, że w [Do1] oraz w swojej rozprawie doktorskiej Dobrowolski skonstruował przykład małej *G-grupy polskiej* (H,G) (tzn. małej struktury polskiej, w której H jest grupą polską i G działa na niej w sposób ciągły jako grupa automorfizmów), takiej że H nie jest zero wymiarowa, rozwiązując tym samym jeden z problemów z pracy [10].

Praca [20] zawiera silne, strukturalne twierdzenia o lokalnie skończonych pierścieniach proskończonych, które w szczególności stosują się do małych *G-pierścieni zwartych* (zdefiniowanych jako małe struktury polskie (R, G), w których R jest zwartym pierścieniem Hausdorffa i G działa na nim w sposób ciągły jako grupa automorfizmów). Zanim przejdziemy do omówienia tych wyników, powinniśmy wspomnieć, że praca [13] zawiera bardzo przydatne twierdzenia tłumaczące różne algebraiczne własności grup na odpowiadające im własności pierścieni i vice versa, w pewnych ogólnych teoriomodelowych oraz topologicznych sytuacjach. Innymi słowy, mając do dyspozycji wyniki na temat grup [pierścieni] w pewnym kontekście, praca [13] pozwala wywnioskować analogiczne rezultaty na temat pierścieni [group] w tym samym kontekście. Stosując to w kontekście G-przestrzeni zwartych wraz z twierdzeniami o małych G-grupach zwartych udowodnionymi w [17] i omówionymi powyżej, uzyskaliśmy w [13] następujące wnioski: każdy mały, nm-stabilny G-pierścień zwarty (R, G) jest wirtualnie nilpotentny, a gdy $\mathcal{N}M(R) < \omega$, jest on wirtualnie zerowy. Sformułowaliśmy hipotezę, że każdy mały, nm-stabilny pierścień G-zwarty jest wirtualnie zerowy. Na mocy [13] hipoteza ta jest równoważna hipotezie, że każda mała, nm-stabilna G-grupa zwarta jest wirtualnie abelowa. Te dwie równoważne hipotezy pozostają jedynymi wciąż otwartymi problemami dotyczącymi podstawowych algebraicznych własności małych, nm-stabilnych G-group i G-pierścieni zwartych.

Porzucając założenie nm-stabilności, sytuacja staje się znacznie ogólniejsza: istnieją proste przykłady małych G-grup zwartych, które nie są nawet wirtualnie rozwiązalne oraz małych G-pierścieni zwartych, które nie są wirtualnie nilpotentne. Zatem naturalne staje się pytanie, co można powiedzieć o strukturze małych G-grup i G-pierścieni zwartych. W przypadku pierścieni w pracy [20] uzyskaliśmy silne strukturalne twierdzenia. Dla grup problem jest w pełni otwarty.

Jeśli chodzi o [20], okazuje się, że jeśli (R, G) jest małym pierścieniem G-zwartym, to R jest lokalnie skończonym pierścieniem proskończonym i, tak naprawdę, nasze strukturalne twierdzenia udowodniliśmy w tym ogólnym kontekście. Po pierwsze, sklasyfikowaliśmy półproste (w sensie Jacobsona), lokalnie skończone pierścienie proskończone jako produkty pełnych pierścieni macierzowych ograniczonej (skończonej) mocy nad ciałami skończonymi. Po drugie, udowodniliśmy, że radykał Jacobsona dowolnego lokalnie skończonego pierścienia proskończonego jest nil skończonego nil wykładnika (uogólniając jeden z rezultatów z [6]).

Interesującym ogólnym problemem jest pytanie o strukturalne własności małych G-grup i G-pierścieni polskich. Nawet w przypadku nm-stabilnym nic na ten temat nie wiadomo.

Wśród narzędzi użytych w wyżej omówionych pracach są m. in.: podstawowa deskryptywna teoria mnogości (związana ze zbiorami borelowskimi, analitycznymi oraz I kategorii), pewna wiedza z klasycznej teorii grup proskończonych, różne idee i techniki z teorii modeli (głównie z wysoce nietrywialnej teorii grup stabilnych) oraz rachunki algebraiczne i topologiczne.

Rozważania na temat [małych] struktur polskich wydają się perspektywiczne. Praca [10] buduje kontekst i narzędzia pozwalające na stosowanie idei i technik z teorii modeli, deskryptywnej teorii mnogości, topologii oraz teorii grup. Pojęcia wprowadzone w [10] (szczególnie nm-niezależność i $\mathcal{N}M$-ranga) prowadzą do nowych (motywowanych teorią modeli) pytań i twierdzeń na temat deskryptywno teoriomnogościowych oraz topologicznych obiektów. Z drugiej zaś strony mogą one okazać się przydatne w rozwiązywaniu istniejących już w tych dziedzinach problemów. Pojawia się tu wiele konkretnych pytań i hipotez. Bez wchodzenia w szczegóły podaję kilka wątków badawczych na przyszłość: klasyfikowanie zwartych przestrzeni metrycznych z pełną grupą homeomorfizmów, które są małe; dalsze opisywanie struktury grup i pierścieni w kontekście małych struktur polskich; szukanie odpowiedników teoriomodelowych pojęć i twierdzeń (np. twierdzenia o konfiguracji grupowej); szukanie zastosowań do czysto topologicznych lub deskryptywno teoriomnogościowych problemów; szukanie kolejnych przykładów małych struktur (a szczególnie grup) polskich. Interesujące byłoby również znalezienie właściwego pojęcia interpretowalności struktury polskiej w teorii (jak zostało to zrobione dla struktur proskończonych oraz zwartych). Ostatnio pracuję nad zastosowaniami struktur polskich (głównie rezultatów z [17]) w dynamice topologicznej w teorii modeli (pewne aspekty dynamiki topologicznej w teorii modeli zostały omówione w podrozdziale 3.9). Moje wstępne wyniki na ten temat wyglądają bardzo obiecująco.

3.3. **Grupy i pierścienie ω-kategoryczne.** W niniejszym podrozdziale omówię prace [14], [15] i [16] (opublikowane po habilitacji). Ten cykl prac, wsparty pracą [13], również można zaliczyć do moich głównych osiągnięć.

Jak zostało wspomniane we wstępie, jednym z celów algebraicznej teorii modeli jest zrozumienie strukturalnych konsekwencji naturalnych teoriomodelowych założeń w przypadku klasycznych struktur algebraicznych. Własność, którą stale zakładamy w tym podrozdziale, to ω-kategoryczność. Przypomnijmy, że struktura pierwszego rzędu M w języku przeliczalnym jest *ω-kategoryczna*, gdy jej teoria ma (z dokładnością do izomorfizmu) co najwyżej jeden model mocy $\aleph_0$. Moim ogólnym celem było i jest zrozumienie struktury grup i pierścieni ω-kategorycznych spełniających pewne naturalne teoriomodelowe założenia pochodzące z teorii stabilności i jej uogólnień.

Rozważania tego typu mają długą historię. Fundamentalne twierdzenie, udowodnione przez Buara, Cherlina i Macintyre'a w [BCM] oraz Felgnera w [Fe], mówi, że ω-kategoryczne grupy stabilne są wirtualnie nilpotentne. Znana hipoteza stwierdza, że są one nawet wirtualnie abelowe, co zostało udowodnione w przypadku superstabilnym. Jeśli chodzi o ω-kategoryczne pierścienie stabilne, są one wirtualnie nilpotentne [BaRo], a przypuszcza się, że są nawet wirtualnie zerowe. Na mocy [13] powyższe hipotezy o grupach i pierścieniach okazują się być równoważne. Podobnie jak dla grup, hipoteza o pierścieniach jest prawdziwa w przypadku superstabilnym. Istnieje wiele uogólnień oraz wariantów wspomnianych wyników. Na przykład ω-kategoryczne grupy z NSOP (negacja tzw. ścisłej własności porządkowej) są wirtualnie nilpotentne [Ma], co na mocy [13] implikuje, że ω-kategoryczne pierścienie z NSOP też są wirtualnie nilpotentne. Wiadomo również, że ω-kategoryczne grupy superproste są wirtualnie *finite-by-abelian* [EvWa], a ω-kategoryczne pierścienie superproste są wirtualnie *finite-by-null* na mocy jednego z twierdzeń z pracy [6].

Główną motywacją w pracy [14] była chęć opisania struktury grup i pierścieni ω-kategorycznych spełniających NIP (czyli brak tzw. własności niezależności). Klasa struktur z NIP-em stanowi szerokie uogólnienie klasy struktur stabilnych. Zawiera ona struktury o-minimalne oraz wiele innych ciekawych struktur (np. ciała algebraicznie domknięte z waluacją). W ostatnich latach powstało wiele ważnych prac na temat NIP, np. [HPP, HrPi, Sh1, Si]. W [14] udowodniliśmy, że każdy ω-kategoryczny pierścień z NIP-em jest wirtualnie nilpotentny oraz postawiliśmy hipotezę, że każda ω-kategoryczna grupa z NIP jest również wirtualnie nilpotentna. Korzystając z twierdzenia o pierścieniach oraz z pracy [13], udowodniliśmy ją przy dodatkowym założeniu, że rozważana grupa ma własność fsg (skończenie spełnialnych generików). Jest to ważna własność badana w ostatnim czasie, np. w pracach [HPP, HrPi]. Przypomnijmy, że zarówno grupy stabilne jak i pewna szeroka klasa grup definiowalnych w strukturach o-minimalnych posiadają własność fsg.

Okazuje się, że ω-kategoryczne grupy z NIP-em i fsg są generycznie stabilne w sensie [HrPi]. Pojęcie to bardzo dobrze wpisuje się w modny ostatnio trend w teorii modeli polegający na studiowaniu struktur "kawałkami" podobnych do struktur stabilnych. Zatem można postawić pytanie o strukturę ω-kategorycznych grup i pierścieni generycznie stabilnych, bez założenia NIP. Satysfakcjonującą odpowiedź na to pytanie uzyskaliśmy w pracach [15] i [16]. Najpierw w pracy [15] udowodniliśmy, że każda ω-kategoryczna grupa generycznie stabilna jest wirtualnie rozwiązalna, a potem, wykorzystując ten fakt, w pracy [16] wzmocniliśmy tezę, pokazując, że taka grupa jest wirtualnie nilpotentna. Drugi główny wynik pracy [16] mówi, że każdy ω-kategoryczny pierścień generycznie stabilny jest wirtualnie nilpotentny.

Narzędzia użyte w pracach [14], [15] oraz [16] to głównie teoria modeli (np. warunki łańcucha, spójne składowe, typy generik), klasyczna teoria pierścieni, pewne fragmenty teorii grup oraz elementarnej teorii reprezentacji.

W kilku miejscach w podrozdziałach 3.2 oraz 3.3 omówiliśmy wyniki, które otrzymaliśmy, korzystając z "pomocniczej" pracy [13]. Niniejszy rozdział zakończę krótkim omówieniem tej pracy.

W [13] analizowaliśmy związki między algebraicznymi własnościami grup i pierścieni definiowalnych w strukturach pierwszego rzędu oraz $*$-*domkniętych* (tzn. domkniętych i niezmienniczych nad pewnym skończonym zbiorem parametrów) w G-*przestrzeniach zwartych* (zdefiniowanych jako struktury polskie (X, G), w których X jest zwartą przestrzenią Hausdorffa i G działa na niej w sposób ciągły). W obu tych kontekstach przenieśliśmy pewne własności grup (np. wirtualną przemienność lub rozwiązalność) na odpowiednie własności pierścieni (np. wirtualną zerowość lub nilpotentność). Uzyskaliśmy też pewne wyniki tłumaczące własności pierścieni na odpowiednie własności grup w wymienionych wyżej dwóch kontekstach. Jako konsekwencje otrzymaliśmy kilka strukturalnych wyników o grupach i pierścieniach ω-kategorycznych oraz o małych, nm-stabilnych G-pierścieniach zwartych; wyniki te omówiłem już wcześniej w tym autoreferacie. Znaleźliśmy też zaskakujące związki między różnymi hipotezami na temat małych grup proskończonych.

3.4. **Grupy i ciała interpretowalne w teoriach różanych.** W tym podrozdziale omówię prace [7], [8], [9] (które składały się na moją rozprawę habilitacyjną) oraz pracę [22] (opublikowaną ostatnio).

Teorie różane stanowią szeroką klasę, zawierającą zarówno teorie stabilne (i, ogólniej, proste), jak i teorie o-minimalne. Jedna z równoważnych definicji teorii różanej mówi, że na podzbiorach modeli tej teorii istnieje ternarna relacja o pewnych porządnych własnościach. W teoriach różanych pewna szczególna relacja, zwana þ-forkingiem (czytaj "thorn-forkingiem"), ma wszystkie te (i pewne inne dobre) własności, co pozwala na używanie niektórych technik rozwiniętych w rachunku forkingowym w teoriach stabilnych oraz prostych. W szczególności, pracując z teoriami różanymi, można uzyskać jednocześnie wyniki dla teorii stabilnych i o-minimalnych, używając technik z teorii stabilności, podczas gdy dowody dla struktur

o-minimalnych są zazwyczaj odmiennej natury. Teorie różane zostały zdefiniowane i były rozwijane przez Scanlona i jego doktorantów Onshuusa i Ealyego [On, EaOn] oraz przez Adlera [Ad1]. Istotnymi pojęciami używanymi w teoriach różanych są m. in. þ-forking, $\mathrm{U}^{\text{þ}}$-ranga, lokalne þ-rangi. Mówimy, że teoria jest *superróżana*, gdy $\mathrm{U}^{\text{þ}}$-ranga każdego typu jest liczbą porządkową (równoważnie, jest mniejsza niż ∞).

Głównym celem pracy [7] było zrozumienie struktury grup superróżanych spełniających NIP [oraz fsg], które są "małej" $\mathrm{U}^{\text{þ}}$-rangi. Motywacją były tu podobne rezultaty znane w przypadku struktur skończonej rangi Morleya (a nawet struktur superstabilnych) oraz struktur o-minimalnych [Po1, NPR, Ra]. Cel nasz osiągnęliśmy, dowodząc następujących dwóch twierdzeń (drugie twierdzenie jest głównym wynikiem pracy). Pierwsze twierdzenie mówi, że jeśli G jest grupą spełniającą NIP oraz fsg i taką, że $\mathrm{U}^{\text{þ}}(G) = 1$, to G jest wirtualnie abelowa. Drugie twierdzenie mówi, że jeśli założenie, że $\mathrm{U}^{\text{þ}}(G) = 1$ zastąpimy warunkiem $\mathrm{U}^{\text{þ}}(G) = 2$, to G jest wirtualnie rozwiązalna.

Dowód pierwszego twierdzenia jest dość prosty, choć używa pewnych wstępnych, poczynionych przez nas obserwacji na temat þ-generików oraz inwolucji. Dowód drugiego twierdzenia jest dużo bardziej wymagający. Użyliśmy w nim pewnych idei z dowodu analogicznego twierdzenia dla grup rangi Morleya 2, ale nasza sytuacja wymagała wielu nowych pomysłów. Użyliśmy podgrup borelowskich (które zdefiniowaliśmy inaczej niż w przypadku rangi Morleya 2), pracowaliśmy z inwolucjami, wreszcie użyliśmy pewnej funkcji pochodzącej z tzw. "black box group theory". Warto wspomnieć, że Bruno Poizat zastosował później nasze triki w dowodzie twierdzenia, że każda grupa rangi Cantora 2 jest wirtualnie rozwiązalna [Po2].

Motywacją dla prac [8] i [9] jest następujące ogólne pytanie sformułowane w [9].

Pytanie 1. *Czy dla danej nieskończonej grupy $\langle G, \cdot\rangle$ (powiedzmy skończonego wymiaru, dla pewnego sensownego pojęcia wymiaru) istnieje nieskończone ciało interpretowalne w $\langle G, \cdot\rangle$?*

Powyższe pytanie związane jest z hipotezą Cherlina-Zilbera z lat siedemdziesiątych, mówiącą, że prosta grupa skończonej rangi Morleya jest grupą algebraiczną nad ciałem algebraicznie domkniętym w niej interpretowalnym. Hipoteza ta zapoczątkowała nową gałąź teorii modeli – grupy skończonej rangi Morleya.

W naszym przypadku pojęciem wymiaru jest $\mathrm{U}^{\text{þ}}$-ranga (uogólnia ona wymiar o-minimalny oraz U-rangę Lascara), a zatem G jest różana. Jeśli chcemy mieć pozytywną odpowiedź na Pytanie 1, G nie może być wirtualnie abelowa. Przy tym koniecznym warunku [PeSt] dostarcza pozytywnej odpowiedzi na Pytanie 1 w kontekście o-minimalnym. W przypadku grup skończonej rangi Morleya sytuacja jest bardziej skomplikowana. Przy założeniu, że G nie jest wirtualnie abelowa, mamy następujące trzy możliwości:

(1) G nie jest wirtualnie rozwiązalna,
(2) G jest wirtualnie rozwiązalna, ale nie wirtualnie nilpotentna,
(3) G jest wirtualnie nilpotentna, ale nie wirtualnie abelowa.

Jeśli G jest skończonej rangi Morleya, odpowiedź na Pytanie 1 w przypadku (2) jest pozytywna [Po1, Corollary 3.20]. W przypadku (1) jest to otwarty problem. Są jednak pewne częściowe wyniki (przy założeniu, że grupa nie jest zła (ang. *bad* *group*)) [Po1, Corollary 3.28]. Wreszcie w przypadku (3) odpowiedź jest negatywna [Ba].

W pracach [8] i [9] uogólniliśmy wyniki dostarczające pozytywnej odpowiedzi na Pytanie 1 w kontekście grup skończonej rangi Morleya do naszego znacznie ogólniejszego kontekstu grup różanych, spełniających NIP (w [9] zakłada się dodatkowo fsg, ponieważ korzysta się z [7]). W szczególności nasze wyniki stosują się w przypadku superstabilnym.

W pracy [8] najpierw podaliśmy bardzo ogólny i prosty dowód twierdzenia dotyczącego interpretowalności ciała ułamków $\bigvee$-definiowalnych dziedzin skończonej $\mathrm{U}^{\text{þ}}$-rangi. Wynik ten jest nowy nawet w kontekście skończonej rangi Morleya. Następnie użyliśmy tego twierdzenia do opisu struktury działania jednej grupy abelowej na innej grupie abelowej w kontekście skończonej $\mathrm{U}^{\text{þ}}$-rangi (co jest odpowiednikiem podobnego rezultatu znanego w przypadku skończonej rangi Morleya). Korzystając z tego uzyskaliśmy główny wynik pracy [8]: jeśli G jest grupą skończonej $\mathrm{U}^{\text{þ}}$-rangi, spełniającą NIP i G jest wirtualnie rozwiązalna, ale nie wirtualnie nilpotentna, to G interpretuje nieskończone ciało. W sytuacji gdy $\mathrm{U}^{\text{þ}}(G) = 2$ dodatkowo opisaliśmy grupę G jako produkt półprosty grupy addytywnej i podgrupy skończonego indeksu grupy multyplikatywnej pewnego ciała K interpretowalnego w G.

W [9] udzieliliśmy pozytywnej odpowiedzi na Pytanie 1 dla grup nierozwiązalnych skończonej $\mathrm{U}^{\text{þ}}$-rangi, spełniających pewne techniczne założenia (uogólniając podobny fakt znany w sytuacji skończonej rangi Morleya). Jest to wniosek z głównego rezultatu pracy [9], w którym uogólniliśmy część (dotyczącą istnienia interpretowalnego ciała) twierdzenia Hrushovskiego [Po1, Theorem 3.27] opisującego definiowalne, tranzytywne grupy permutacji zbiorów silnie minimalnych w strukturach stabilnych. W naszej sytuacji zamiast zbioru silnie minimalnego rozważamy zbiór $\mathrm{U}^{\text{þ}}$-rangi 1. Twierdzenie jest następujące: Pracujemy w modelu monstrum $\mathfrak{C}$ różanej teorii T spełniającej NIP. Niech G będzie definiowalną grupą mającą dziedzicznie fsg i taką, że $1 < \mathrm{U}^{\text{þ}}(G) < \infty$. Załóżmy, że G działa definiowalnie na definiowalnym zbiorze S $\mathrm{U}^{\text{þ}}$-rangi 1, tak że istnieje $s \in S$, dla którego G_s (stabilizator s w G) nie ma definiowalnej podgrupy skończonego indeksu, której normalizator ma skończony indeks w G. Wówczas istnieje nieskończone ciało interpretowalne w $\mathfrak{C}$.

Końcowe fragmenty prac [7], [8] oraz praca [22] poświęcone są ciałom superóżanym z NIP-em. Od teraz zakładamy, że rozważane ciała są nieskończone. Przypomnijmy, że każde ciało superstabilne jest algebraicznie domknięte. Można wyróżnić dwa "ortogonalne" uogólnienia sytuacji z tego twierdzenia: ciała superproste oraz ciała superróżane spełniające NIP. Jeśli chodzi o ciała superproste, znana hipoteza z lat dziewięćdziesiątych ubiegłego wieku mówi, że są one pseudo algebraicznie domknięte. Hipoteza ta okazała się bardzo trudna (istnieją jedynie częściowe wyniki na jej temat). W [7] sformułowaliśmy następującą hipotezę.

Hipoteza 2. *Każde ciało superróżane spełniające NIP jest algebraicznie lub rzeczywiście domknięte.*

Uzasadnieniem dla takiej, a nie innej konkluzji Hipotezy 2 może być fakt, że z jednej strony zarówno (czyste) ciała algebraicznie domknięte, jak i (czyste) ciała rzeczywiście domknięte są superróżane i mają NIP, z drugiej zaś strony główne klasy przykładów ciał superróżanych z NIP-em spełniają naszą konkluzję, tzn. ciała superstabilne są algebraicznie domknięte, a o-minimalne ciała uporządkowane są rzeczywiście domknięte.

W ostatnim rozdziale pracy [7] uzyskaliśmy kilka podstawowych własności spójnych składowych, typów generik oraz stabilizatorów w kontekście ciał spełniających fsg. Przy ich użyciu zauważyliśmy, że, stosując dowód twierdzenia Macintyre'a (dotyczącego ciał ω-stabilnych), można otrzymać następujące twierdzenie: każde superróżane ciało, którego grupa addytywna ma fsg, jest algebraicznie domknięte.

Ostatni rozdział pracy [8] zawiera pewne idee i obserwacje związane z Hipotezą 2. Główny pomysł polega na zastosowaniu definiowalnych miar (rozważanych w [HrPi]) w celu uzyskania informacji o algebraicznych własnościach superróżanych ciał spełniających NIP. Używając pewnego rezultatu z [HrPi] oraz średniowalności grup rozwiązalnych, poczyniliśmy kilka obserwacji. Przytoczę tu jedną z nich: jeśli K jest ciałem superróżanym z NIP-em, to $K = K^n - K^n$ dla każdej liczby naturalnej $n > 0$.

Główny pomysł pracy [22] to próba użycia waluacji w celu udowodnienia Hipotezy 2. Idea polega na tym, żeby z założenia nie wprost (że teza nie zachodzi) wyprodukować w jakiś sposób definiowalną waluację; istnienie takiej waluacji przeczy różaności, a więc dowód hipotezy byłby zakończony. Idei tej nie udało się zrealizować, ale doprowadziła ona do sformułowania następującej "aproksymacji" tej i kilku innych hipotez, którą udowodniliśmy dla ciał dodatniej charakterystyki.

Powiemy, że ciało K jest *radykalnie ograniczone*, gdy dla każdego skończonego rozszerzenia L ciała K i dla każdej liczby naturalnej $n > 0$ indeks $[L^* : (L^*)^n]$ jest skończony i ponadto, jeśli charakterystyka p ciała K jest skończona i $f\colon L \to L$ zadana jest wzorem $f(x) = x^p - x$, indeks $[L^+ : f[L]]$ też jest skończony.

Hipoteza 3. *Niech K będzie ciałem radykalnie ograniczonym. Wtedy istnieje nietrywialna, definiowalna waluacja na K lub każda nietrywialna waluacja na K ma podzielną grupę waluacji i algebraicznie lub rzeczywiście domknięte ciało reszt.*

Ponieważ ciała superróżane są radykalnie ograniczone, założenie powyższej hipotezy jest słabsze niż założenie Hipotezy 2. Łatwo sprawdzić, że teza powyższej hipotezy również jest osłabieniem tezy Hipotezy 2. Główny wynik pracy [22] mówi, że: jeśli ciało K jest radykalnie ograniczone, to istnieje nietrywialna, definiowalna waluacja na K lub każda nietrywialna waluacja na K ma podzielną grupę waluacji oraz, w przypadku gdy charakterystyka ciała K jest dodatnia, ma ona algebraicznie domknięte ciało reszt. W szczególności każda nietrywialna waluacja na superróżanym ciele dodatniej charakterystyki ma podzielną grupę waluacji i algebraicznie domknięte ciało reszt. Otrzymaliśmy ponadto pewne częściowe wyniki w charakterystyce 0.

Dowód głównego twierdzenia bazuje na pracy [Ko] zawierającej wyniki o istnieniu nietrywialnych, definiowalnych waluacji związanych z pewnymi addytywnymi oraz multyplikatywnymi podgrupami rozważanego ciała.

3.5. **Grupy i ciała minimalne oraz kwaziminimalne.**

Omówię tu prace [17] i [21] (opublikowane po habilitacji).

Strukturą minimalną nazywamy nieskończoną strukturę, której wszystkie definiowalne podzbiory są skończone lub ko-skończone. *Strukturą kwaziminimalną* nazywamy nieprzeliczalną strukturę w języku przeliczalnym, której wszystkie definiowalne podzbiory są przeliczalne lub ko-przeliczalne. Wspólnym uogólnieniem grup [ciał] minimalnych oraz kwaziminimalnych są grupy [ciała] regularne (patrz [PiTa] i [21]). Pojęcie struktury minimalnej jest fundamentalne w teorii modeli i odgrywa istotną rolę w teorii klasyfikacji. Struktury kwaziminimalne zostały wprowadzone znaczniej później. Sama definicja struktury kwaziminimalnej mówi o pewnej prostocie algebry Boole'a podzbiorów definiowalnych. Warto tu przypomnieć, że znana hipoteza Zilbera mówi, że zespolone ciało eksponencjalne $(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1, \exp)$ jest kwaziminimalne. Pojęcia regularności używane przez nas zostały wprowadzone w ostatnim czasie w pracy [PiTa] jako naturalne uogólnienia klasycznych pojęć regularności rozważanych w teoriach stabilnych do przypadku dowolnych teorii.

Główną motywacją dla omawianych prac jest hipoteza Podewskiego sformułowana ponad 40 lat temu (i będąca chyba najstarszym otwartym problemem w algebraicznej teorii modeli).

Hipoteza 4. *Każde ciało minimalne jest algebraicznie domknięte.*

Powyższą hipotezę można uogólnić do ciał regularnych (w szczególności do ciał kwaziminimalnych), z tą samą konkluzją.

Wiadomo, że każde czyste ciało algebraicznie domknięte jest minimalne. Hipoteza Podewskiego została udowodniona w charakterystyce dodatniej w [Wa1] w 1999 roku. Od tego czasu do momentu pojawienia się prac [17] i [21] nie poczyniono znaczącego postępu wokół tej hipotezy (mimo że uzyskano ciekawe i ważne wyniki na temat struktur minimalnych i kwaziminimalnych [Ta, PiTa]).

Czyste grupy minimalne zostały sklasyfikowane przez Reinekego [Re]: są to podzielne grupy abelowe ze skończenie wieloma elementami każdego skończonego rzędu oraz elementarne grupy abelowe wykładnika będącego liczbą pierwszą. W szczególności są one abelowe. Na pierwszy rzut oka dość zaskakujący może wydawać się fakt, że nie potrafimy pokazać przemienności grup kwaziminimalnych.

Hipoteza 5. *Każda kwaziminimalna [ogólniej, regularna] grupa jest abelowa.*

Najpierw skoncentruję się na strukturach minimalnych i omówię pracę [17]. Niech M będzie strukturą minimalną. Jedyny niealgebraiczny typ $p \in S_1(M)$ nazywamy typem *generik* struktury M. W przypadku gdy M jest grupą minimalną, p jest $\emptyset$-definiowalny i dlatego odtąd zakładamy tę własność typu p. Przez łatwą adaptację pewnego argumentu z [PiTa] otrzymujemy następującą dychotomię: albo p jest *symetryczny* (co formalnie oznacza, że wszystkie generyczne ciągi Morleya są całkowicie nieodróżnialne, co jest z kolei równoważne temu, że (jedyny globalny dziedzic typu) p jest generycznie stabilny), albo p jest niesymetryczny, co jest równoważne temu, że M jest *uporządkowana* (tzn. istnieje M-definiowalny częściowy porządek na M z nieskończonym łańcuchem). Zatem dla każdej grupy minimalnej zachodzi jedna z dwóch możliwości: albo G jest *symetryczna* (w takim sensie, że jej typ generik jest symetryczny (równoważnie, generycznie stabilny)), albo G jest uporządkowana (w sensie opisanym w poprzednim zdaniu, a nie w klasycznym sensie algebraicznym!).

W [17] udowodniliśmy hipotezę Podewskiego dla ciał symetrycznych. Zatem, na mocy powyższej dychotomii, wystarczy rozważać minimalne ciała uporządkowane (w wyżej opisanym sensie). Postawiliśmy hipotezę, że takie ciała nie istnieją (co natychmiast zakończyłoby dowód hipotezy Podewskiego) i udowodniliśmy ją dla prawie liniowych ciał minimalnych. (*Prawie liniowe* struktury minimalne zdefiniowaliśmy jako (uporządkowane) struktury minimalne M, dla których istnieje definiowalny ścisły porządek na M z nieskończonym łańcuchem, taki że relacja nieporównywalności jest relacją równoważności.) Wynika to ze szczegółowej analizy prawie liniowych grup minimalnych, a dokładniej z następującego twierdzenia udowodnionego w [17]: każda prawie liniowa grupa minimalna jest elementarną grupą abelową wykładnika p lub skończoną sumą p-grup Prüfera, dla pewnej liczby pierwszej p; w szczególności jest ona grupą torsyjną. W najbardziej technicznej części pracy podaliśmy pełną klasyfikację prawie liniowych grup minimalnych jako pewnych grup z waluacją, podając w szczególności przykłady implikujące, że oba przypadki z tezy ostatniego twierdzenia można zrealizować (co pokazuje, że teoriogrupowy analogon powyższego twierdzenia, mówiącego, że nie istnieją prawie liniowe ciała minimalne, nie jest prawdziwy).

W [17] sformułowaliśmy kilka dalszych pytań, które są ciekawe same w sobie, chociaż główną motywacją jest fakt, że pozytywna odpowiedź na dowolne z nich implikowałaby hipotezę Podewskiego. W pierwszym z nich pytamy, czy każda uporządkowana grupa minimalna jest torsyjna. Przypomnijmy, że jedno z naszych twierdzeń omówionych w poprzednim akapicie daje pozytywną odpowiedź w przypadku prawie liniowym. W drugim z nich pytamy, czy każda uporządkowana struktura minimalna jest prawie liniowa. Nie znamy żadnego kontrprzykładu.

Na zakończenie dyskusji na temat moich wyników o ciałach minimalnych chciałbym dodać, że poprzez bardzo prosty argument w pracy [22] pokazaliśmy, że każda nietrywialna waluacja na ciele minimalnym ma podzielną grupę waluacji i algebraicznie domknięte ciało reszt.

W pracy [21] rozważaliśmy uogólnienie hipotezy Podewskiego do ciał regularnych, które jest otwartym problemem nawet dla ciał dodatniej charakterystyki. Warto dodać, że, w przeciwieństwie do ciał minimalnych, na mocy [PiTa] wiemy, że istnieją prawie liniowe ciała kwaziminimalne (z naturalnym wariantem definicji prawie liniowości). W ostatnim rozdziale [21] poczyniliśmy pewne obserwacje oraz konstrukcje związane z Hipotezą 5.

Najpierw omówię wyniki o ciałach. Pracujemy z ciałem regularnym K i bez zmniejszenia ogólności zakładamy, że K jest modelem monstrum swojej teorii. Na mocy [PiTa] mamy podobną dychotomię jak poprzednio (z odpowiednim wariantem pojęcia struktury uporządkowanej, której definicję opuszczamy): albo K jest symetryczne (równoważnie, generycznie stabilne), albo K jest uporządkowane. W [21] zauważyliśmy, że argument z [17] przenosi się do obecnej sytuacji i pokazuje, że każde ciało regularne, generycznie stabilne jest algebraicznie domknięte. Wywnioskowaliśmy stąd, że regularne ciała z NSOP (negacja ścisłej własności porządkowej) oraz kwaziminimalne ciała mocy większej niż $\aleph_1$ są algebraicznie domknięte. Główny rezultat pracy [21] dotyczący ciał jest pewnym technicznym twierdzeniem, które może się okazać przydatne w dowodzie hipotezy, że ciała regularne z NIP-em są algebraicznie domknięte. Dla zainteresowanego czytelnika podaję sformułowanie tego twierdzenia (opuszczając definicje różnych terminów w nim użytych). Niech K

będzie ciałem regularnym i niech p będzie jego globalnym typem generik. Załóżmy, że K ma właściwe, skończone rozszerzenie L stopnia n (wtedy L utożsamiamy z K^n z dodawaniem po współrzędnych oraz definiowalnym mnożeniem). Wówczas $p^{(n)}$ ma nieograniczoną orbitę względem działania grupy multyplikatywnej ciała L.

W rozdziale 3 pracy [21] próbowaliśmy obalić Hipotezę 5. Problem ten zredukowaliśmy do przypadku grup z jedną nietrywialną klasą sprzężenia. Następnie zauważyliśmy, że standardowa konstrukcja (używająca HNN-rozszerzeń) nieprzeliczalnej grupy z jedną nietrywialną klasą sprzężenia nie prowadzi do grupy kwaziminimalnej, ponieważ centralizatory wszystkich elementów są tu nieprzeliczalne (a więc i ko-nieprzeliczalne dla elementów różnych od neutralnego). Próbując ominąć tę przeszkodę, skonstruowaliśmy grupę mocy $\aleph_1$ z jedną nietrywialną klasą sprzężenia, w której każdy element różny od neutralnego ma przeliczalny centralizator. Konstrukcja ta jest dość skomplikowana i używa kombinatorycznej teorii grup. Otwartym problemem pozostaje, czy skonstruowana przez nas grupa jest kwaziminimalna lub przynajmniej regularna.

3.6. **Ciała stabilne.** Omówię tu pracę [12] (opublikowaną po habilitacji).

Jedna z najbardziej znanych hipotez w algebraicznej teorii modeli mówi, że każde ciało stabilne jest rozdzielczo domknięte. Uzyskano wiele rezultatów, które mówią, że jest ono nawet algebraicznie domknięte, ale przy dodatkowych założeniach (np. superstabilności). W twierdzeniach tego typu mamy do dyspozycji odpowiednią rangę (np. U-rangę Lascara), która dzięki swoim addytywnym własnościom pozwala udowodnić własność wymiany dla generików (jeśli $g \in \mathrm{acl}(h)$ jest generikiem, to h również nim jest); to wystarcza, żeby pokazać, że ciało jest algebraicznie domknięte.

W [12] rozważaliśmy powyższą hipotezę dla ciał stabilnych skończonej wagi. Ponieważ ciała rozdzielczo domknięte o nieskończonym stopniu niedoskonałości są wagi 1, najsilniejsza hipoteza, jaką można sformułować na temat ciał stabilnych skończonej wagi mówi, że są one rozdzielczo domknięte. Brak dobrych addytywnych własności wagi oraz fakt, że własność wymiany dla generików nie zachodzi przy założeniu skończoności wagi (np. w ciałach rozdzielczo domkniętych o nieskończonym współczynniku niedoskonałości), czynią sytuację ciekawą i niewpadającą w schematy znanych twierdzeń dostarczających algebraicznej domkniętości ciała, a co za tym idzie zmuszają do poszukiwania nowych idei, które mogą okazać się przydatne również bez założenia skończoności wagi. Ponadto nasze rozważania związane są z pytaniem Shelaha o strukturę ciał silnie zależnych (które w przypadku stabilnym zawsze mają skończoną wagę) [Sh2].

W [12] udowodniliśmy naszą hipotezę w przypadku ciał wagi 1, tzn. pokazaliśmy, że każde ciało stabilne wagi 1 jest rozdzielczo domknięte. Tak naprawdę użyliśmy tylko własności, że elementy niegenerik stanowią ciało, co wynika z założenia, że waga wynosi 1. Kluczowy lemat pokazuje, że mamy tu pewien wariant własności wymiany dla generików, ale z teoriomodelowym $\mathrm{acl}(\cdot)$ zastąpionym przez teoriociałowe rozdzielcze domknięcie. Otrzymaliśmy też inne rezultaty o ciałach (i grupach abelowych) stabilnych skończonej wagi oraz udowodniliśmy, że ciała silnie stabilne są doskonałe.

3.7. **Ciała rozdzielczo domknięte.** Omówię tu pracę [4] (opublikowaną między doktoratem i habilitacją).

W [PiZi] autorzy podali nowy dowód hipotezy Mordella-Langa dla ciał charakterystyki 0, eliminujący najbardziej skomplikowany fragment dowodu Hrushovskiego: geometrie Zariskiego. Zauważyli też, że przy próbie rozszerzenia ich metody do ciał dodatniej charakterystyki pewne typy (zwane typami cienkimi i bardzo cienkimi) w $SCF_{p,e}$ (teoria ciał rozdzielczo domkniętych charakterystyki p i stopnia niedoskonałości e) odgrywają istotną rolę. Rozważania te doprowadziły autorów do pytania, czy w $SCF_{p,e}$ istnieje typ U-rangi 1, który jest cienki, ale nie bardzo cienki.

W [4] odpowiedzieliśmy na to pytanie twierdząco. Więcej nawet – podaliśmy konstrukcję typu cienkiego, ale nie bardzo cienkiego, który jest U-rangi 1 i dowolnego stopnia przestępnego > 1. Ponadto typ ten może być wybrany jako typ generik pewnej typowo-definiowalnej podgrupy grupy $(L, +)$, gdzie L jest modelem monstrum $SCF_{p,e}$.

Mimo że z punktu widzenia ewentualnego rozszerzenia dowodu Pillaya-Zieglera do przypadku dodatnich charakterystyk był to zły znak, wciąż pozostawała nadzieja: wystarczyło pokazać, że dla każdej semiabelowej rozmaitości A typ generik grupy $\bigcap_{n\in\omega} p^n A(L)$ jest bardzo cienki. Stwierdzenie to okazało się jednak fałszywe [BeDe].

Ostatnio Benoist, Bouscaren i Pillay oraz Corpet i Roessler znaleźli nowe dowody Hipotezy Mordella-Langa dla wszystkich charakterystyk (poprzez redukcję do Hipotezy Manina-Mumforda).

3.8. **Teoriomodelowe spójne składowe grup.** Omówię tu pracę [24].

Jest to dłuższa praca, w której znajdujemy i badamy pewne nowe związki teorii modeli z algebrą (w szczególności z algebraiczną K-teorią). Powiązaliśmy tu pewne fundamentalne własności teoriomodelowych spójnych składowych grupy będącej rozszerzeniem danej grupy przez grupę abelową z własnościami 2-kocyklu definiującego to rozszerzenie. Pozwoliło nam to użyć bardziej zaawansowanych algebraicznych narzędzi (np. teorii Matsumoto-Moore'a oraz ograniczonych kohomologii) do skonstruowania nowych klas przykładów, dla których spójne składowe posiadają pewną pożądaną własność omówioną poniżej (wcześniej znanych było jedynie kilka takich przykładów).

Przejdźmy do szczegółów. Pracujemy w modelu monstrum $\mathfrak{C}$ dowolnej teorii. Niech $B \subseteq \mathfrak{C}$ będzie małym (tzn. mocy mniejszej niż stopień nasyconości $\mathfrak{C}$) zbiorem parametrów. Przypomnijmy, że zbiór *B-definiowalny* to zbiór realizacji (w $\mathfrak{C}$) formuły z parametrami z B, zbiór *B-typowo-definiowalny* to zbiór realizacji typu nad B (czyli przekrój (skończonej lub nie) rodziny zbiorów B-definiowalnych), a zbiór *B-niezmienniczy* to zbiór niezmienniczy na wszystkie automorfizmy $\mathfrak{C}$ zachowujące punktowo B. Powiemy, że liczba kardynalna jest *ograniczona*, gdy jest ona mniejsza niż stopień nasyconości $\mathfrak{C}$.

Załóżmy, że G jest grupą $\emptyset$-definiowalną w $\mathfrak{C}$ (tzn. zarówno uniwersum, jak i działanie grupowe są $\emptyset$-definiowalne w $\mathfrak{C}$) i niech B będzie (małym) zbiorem parametrów z $\mathfrak{C}$. Następujące spójne składowe odgrywają istotną rolę w analizie grup z teoriomodelowego punktu widzenia:

- przekrój wszystkich B-definiowalnych podgrup G skończonego indeksu, oznaczany przez G^0_B,

- najmniejsza B-typowo-definiowalna podgrupa G ograniczonego indeksu, oznaczana przez G^{00}_B,
- najmniejsza B-niezmiennicza podgrupa G ograniczonego indeksu, oznaczana przez G^{000}_B lub przez G^{∞}_B.

Jasne jest, że $G^{000}_B \leqslant G^{00}_B \leqslant G^{0}_B \leqslant G$ i łatwo pokazać, że wszystkie te grupy są normalne w G. W pewnych sytuacjach powyższe składowe nie zależą od wyboru B, np. w teoriach z NIP-em. Począwszy od tego miejsca będziemy opuszczać B dla uproszczenia notacji.

Omówię teraz krótko motywację do rozważania powyższych składowych; więcej informacji można znaleźć np. w [HPP, HrPi, GiNe, Gi]. Składowa G^0 odgrywa podstawową rolę w teorii grup stabilnych, m. in. dzięki własności, że G/G^0 jest zawsze grupą proskończoną. Składowa G^{00} pozwala stowarzyszyć z grupą G zwartą grupę Hausdorffa G/G^{00} (z tzw. topologią logiczną, zdefiniowaną w tej i w ogólniejszej sytuacji w podrozdziale 3.9). Staje się to szczególnie interesujące w kontekście struktur o-minimalnych za sprawą Hipotezy Pillaya, która opisuje G/G^{00} jako zwartą grupę Liego odpowiedniego wymiaru, a więc stowarzysza z grupą G klasyczny matematyczny obiekt G/G^{00} [Pe]. Wspólną motywacją do badania wszystkich trzech składowych są ich związki z odpowiednimi silnymi typami (silnymi typami Shelaha, Kima-Pillaya oraz Lascara, których definicje podaję w podrozdziale 3.9), które z kolei są fundamentalnymi pojęciami w teoriach stabilnych, prostych oraz z NIP-em. Ponadto ilorazy G/G^0, G/G^{00}, G/G^{000} oraz G^{00}/G^{000} są teoriomodelowymi niezmiennikami grupy G (w tym sensie, że nie zależą od wyboru modelu monstrum, w którym je definiujemy), a więc naturalnym teoriomodelowym celem jest ich głębsze zrozumienie.

Korzystając z nietrywialnego rezultatu Newelskiego [Ne3], w pracy [GiNe] wywnioskowano, że zawsze albo $G^{00} = G^{000}$, albo indeks $[G^{00} : G^{000}]$ wynosi przynajmniej $2^{\aleph_0}$. Jednak przez pewien czas otwartym problemem było pytanie, czy może się zdarzyć, że $G^{00} \neq G^{000}$. (Dodajmy, że każdy taki przykład prowadzi do przykładu tzw. teorii nie G-zwartej). Wiadomo, że w pewnych dość ogólnych sytuacjach $G^{00} = G^{000}$ (np. w tzw. definiowalnie średniowalnych grupach definiowalnych w teoriach z NIP-em [HrPi]).

Głównym celem pracy [24] było znalezienie przykładów (a jeszcze bardziej – ogólnych metod ich konstruowania) grup G, dla których $G^{00} \neq G^{000}$. W [CoPi] podano pierwszy przykład (a właściwie kilka silnie ze sobą powiązanych przykładów) takiej grupy. Jest to model monstrum topologicznego uniwersalnego nakrycia $\widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}$ grupy $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.

W szczególności $\widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}$ jest centralnym rozszerzeniem grupy $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ przez $\mathbb{Z}$, zadanym przez definiowalny (w dwusortowej strukturze $((\mathbb{Z},+),(\mathbb{R},+,\cdot))$) 2-kocykl $h\colon \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{Z}$ o skończonym obrazie. Doprowadziło nas to do następującego ogólnego pytania.

Pytanie 6. *Kiedy rozszerzenie $\widetilde{G}$ grupy G przez grupę abelową A spełnia $\widetilde{G}^{00} \neq \widetilde{G}^{000}$ (pracując w modelu monstrum)?*

W pracy [24] wszędzie rozważamy 2-kocykle o skończonym obrazie, definiowalne w strukturach, w których pracujemy.

W pierwszej części pracy [24] scharakteryzowaliśmy warunek $\widetilde{G}^{00} \neq \widetilde{G}^{000}$ w terminach własności 2-kocyklu $h\colon G \times G \to A$ definiującego nasze rozszerzenie oraz zbadaliśmy iloraz $\widetilde{G}^{00}/\widetilde{G}^{000}$. Wyciągnęliśmy dwa wnioski z otrzymanej charakteryzacji, przy użyciu których w dalszej części pracy uzyskaliśmy nowe rodziny przykładów grup, dla których omawiane dwie składowe są różne.

W dowodzie naszej charakteryzacji użyliśmy podstawowej wiedzy na temat rozszerzeń grup i 2-kocykli, teorii modeli oraz prostych argumentów topologicznych. A dokładniej użyliśmy tych narzędzi w dowodzie głównego twierdzenia, dostarczającego warunku na 2-kocykl, który wystarcza do tego, by rozważane dwie składowe były różne. W celu pokazania, że warunek ten jest również konieczny (w dość ogólnym kontekście), użyliśmy dodatkowo nowych rezultatów z [19] oraz [KMS] na temat mocy borelowskich silnych typów Lascara.

Gdy w poniższych przykładach twierdzimy, że dwie składowe są różne, rozumiemy, że są one obliczone w modelach monstrum pewnych teorii (których w tym autoreferacie nie precyzujemy).

Pierwszą klasą uzyskanych przez nas przykładów, uogólniającą przykład Conversano i Pillaya z [CoPi], są pewne centralne rozszerzenia grup symplektycznych $\mathrm{Sp}_{2n}(k)$ (oraz innych grup z nimi związanych) dla ciał uporządkowanych k i liczb naturalnych $n \geqslant 1$. Przykłady te otrzymaliśmy przy użyciu symplektycznych symboli Steinberga oraz teorii Matsumoto-Moore'a [Re, St]. Warto wspomnieć, że użyliśmy ultraproduktu w celu znalezienia 2-kocykli, które da się przedstawić jako liniowe kombinacje skończenie wielu symboli Steinberga (co jest zastosowaniem teoriomodelowego argumentu w teorii Matsumoto-Moore'a).

Druga klasa przykładów, zawierająca pewne centralne rozszerzenia grup wolnych oraz grup podstawowych zamkniętych powierzchni orientowalnych, została uzyskana przy użyciu różnych kwazicharakterów rozważanych w teorii ograniczonych kohomologii [Gr]. Jako wniosek otrzymaliśmy stwierdzenie, że w nieabelowej grupie wolnej, jak również w grupie podstawowej zamkniętej powierzchni orientowalnej genusu $g \geqslant 2$, wzbogaconych o predykaty na wszystkie podzbiory, rozważane dwie składowe są różne. Używając naszej charakteryzacji, pokazaliśmy również, że w rozszerzeniu centralnym $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ przez $\mathbb{Z}$, zdefiniowanym za pomocą 2-kocyklu definiującego $\widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}$ obciętego do $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, rozważane składowe są różne. Warto podkreślić, że przykłady te były nieosiągalne metodami z pracy [CoPi].

Spośród różnych problemów postawionych w [24] przytoczę pytanie motywowane powyższymi przykładami.

Pytanie 7. *Niech Z będzie grupą addytywną liczb całkowitych wzbogaconą o predykaty na wszystkie podzbiory i niech Z^* będzie modelem monstrum. Czy wówczas ${Z^*}^{000}_Z = {Z^*}^{00}_Z$, czy raczej ${Z^*}^{000}_Z \neq {Z^*}^{00}_Z$? Pytanie to można również uogólnić do grup abelowych lub nilpotentnych lub nawet rozwiązalnych. Jeszcze ogólniej można próbować sklasyfikować grupy, które po wzbogaceniu o predykaty na wszystkie podzbiory mają własność, że rozważane spójne składowe są różne.*

Istotny postęp związany z tym pytaniem został poczyniony w [25] (co będzie nieco dokładniej omówione w następnym podrozdziale): dla każdej grupy nilpotentnej G wzbogaconej o predykaty na wszystkie podzbiory grupy G zachodzi ${G^*}^{000}_G = {G^*}^{00}_G$.

3.9. **Dynamika topologiczna, spójne składowe oraz silne typy.** W niniejszym rozdziale omówię prace [19], [23], [25] oraz [26].

Materiał podzieliłem na dwie części. W pierwszej opiszę pracę [25], dotyczącą dynamiki topologicznej grup definiowalnych oraz jej związków z teoriomodelowymi spójnymi składowymi. W drugiej omówię silne typy, dynamikę topologiczną grupy automorfizmów modelu monstrum oraz jej zastosowania do złożoności silnych typów (prace [19], [23], [26]); przedstawię też krótko pracę [1], opublikowaną dużo wcześniej, ale związaną z poruszaną tutaj tematyką. Wyniki dyskutowane w tym podrozdziale należą do moich głównych osiągnięć.

3.9.1. *Dynamika topologiczna i spójne składowe.* Stosowanie metod i idei z dynamiki topologicznej (np. potoków minimalnych czy grup Ellisa) w badaniu grup definiowalnych zapoczątkowane zostało przez Newelskiego w [Ne4] w kontekście działania grupy definiowalnej na jej przestrzeni typów. Motywacją do tych rozważań jest fakt, że przy użyciu "języka" dynamiki topologicznej można opisać nowe zjawiska dotyczące różnych teoriomodelowych obiektów, co prowadzi do nietrywialnych wyników oraz pytań w bardzo ogólnym kontekście. W poprzednim podrozdziale omówiliśmy spójne składowe definiowalnej (w modelu monstrum) grupy G oraz wspomnieliśmy, że ilorazy przez te składowe są teoriomodelowymi niezmiennikami grupy G. Ważnym aspektem badań Newelskiego [Ne4, Ne5] była próba powiązania tych niezmienników z obiektami dynamiki topologicznej (np. z grupą Ellisa). W pracy [25] poszliśmy głębiej w tym kierunku, wiążąc te niezmienniki z tzw. uogólnionym uzwarceniem Bohra zdefiniowanym w [Gl], co doprowadziło do istotnie nowych wyników na temat rozważanych niezmienników. W celu dokładniejszego omówienia głównych rezultatów przedstawię teraz podstawowe informacje na temat dynamiki topologicznej ogólnie i w teorii modeli. Wiele definicji jednak pominę, a zainteresowanego czytelnika odsyłam do pracy [25].

Przypomnijmy, że *G-potok* to para (G, X), w której G jest grupą topologiczną działającą w sposób ciągły na zwartej przestrzeni Hausdorffa X. Często (a w [25] zawsze) rozważamy potoki *dyskretne*, tzn. z dyskretną topologią na grupie G.

Definition 3.1. *Półgrupą Ellisa potoku (G, X), oznaczaną przez $EL(X)$, nazywamy domknięcie zbioru funkcji $\{\pi_g : g \in G\}$ (gdzie $\pi_g : X \to X$ zadane jest przez $\pi_g(x) = gx$) w przestrzeni X^X wyposażonej w topologię produktową, ze składaniem jako działaniem półgrupowym.*

Powyższe działanie półgrupowe jest lewostronnie ciągłe, $EL(X)$ jest G-potokiem, a minimalne podpotoki $EL(X)$ są dokładnie minimalnymi, lewymi ideałami względem działania półgrupowego na $EL(X)$. Fundamentalne twierdzenie udowodnione przez Ellisa mówi, że dla dowolnego minimalnego podpotoku $\mathcal{M}$ potoku $EL(X)$ istnieje co najmniej jeden idempotent w $\mathcal{M}$ i dla każdego idempotenta $u \in \mathcal{M}$, $u\mathcal{M}$ jest grupą, której typ izomorfizmu nie zależy ani od wyboru $\mathcal{M}$, ani od wyboru u. Grupę $u\mathcal{M}$ nazywamy *grupą Ellisa* potoku X. Na grupie tej wprowadza się tzw. τ-topologię, która jest zwarta i T_1 (ale niekoniecznie T_2), a działanie grupowe jest w niej ciągłe na każdej współrzędnej z osobna. Glasner [Gl] pokazał, że po wydzieleniu $u\mathcal{M}$ przez pewną podgrupę normalną, oznaczaną przez $H(u\mathcal{M})$, otrzymujemy (topologiczną) zwartą grupę Hausdorffa. Udowodnił też, że w przypadku dyskretnej grupy G oraz

$X := \beta G$ (uzwarcenie Stona-Čeha), $u\mathcal{M}/H(u\mathcal{M})$ okazuje się być tzw. uogólnionym uzwarceniem Bohra grupy G.

Od teraz zakładamy, że G jest grupą $\emptyset$-definiowalną w strukturze M. Newelski zauważył, że właściwym teoriomodelowym analogonem βG jest przestrzeń $S_{G,ext}(M)$ zewnętrznie definiowalnych typów zupełnych nad M zawierających G (patrz [25]). Jasne jest, że $S_{G,ext}(M)$ posiada naturalną strukturę G-potoku i okazuje się, że na $S_{G,ext}(M)$ istnieje struktura półgrupy izomorficznej z $EL(S_{G,ext}(M))$. Zauważmy, że opisany tutaj teoriomodelowy kontekst uogólnia klasyczny przypadek grupy dyskretnej G (poprzez wzięcie $M := G$ wzbogaconego o predykaty na wszystkie podzbiory G).

Omówię teraz krótko topologię logiczną na ilorazach przez spójne składowe. Niech $\mathfrak{C} \succ M$ będzie modelem monstrum, a $A \subseteq M$ dowolnym podzbiorem. Przez G^* oznaczamy interpretację G w $\mathfrak{C}$. Oba ilorazy G^*/G^{*00}_A i G^*/G^{*000}_A można wyposażyć w *topologię logiczną* przez powiedzenie, że podzbiór jest domknięty, gdy jego przeciwobraz przez odpowiednie odwzorowanie ilorazowe jest typowo-definiowalny. Topologia ta jest dobrym narzędziem do analizowania pierwszego ilorazu, ponieważ staje się on (topologiczną) zwartą grupą Hausdorffa. Drugi iloraz wyposażony w topologię logiczną też jest zwarty (i operacja grupowa jest ciągła), ale nie musi być on przestrzenią Hausdorffa, więc topologia logiczna nie jest w tym przypadku specjalnie przydatna. Okazuje się, że G^{*00}_A/G^{*000}_A jest dokładnie domknięciem jedności w G^*/G^{*000}_A. W szczególności topologia logiczna na G^{*00}_A/G^{*000}_A jest trywialna, a więc zupełnie bezużyteczna. Dlatego jednym z głównych problemów dotyczących spójnych składowych jest pytanie, w jaki sposób ilorazy G^*/G^{*000}_A oraz G^{*00}_A/G^{*000}_A rozważać jako obiekty matematyczne. Praca [25] daje pewną odpowiedź na to pytanie. Inną odpowiedź (nawet w ogólniejszym kontekście) otrzymaliśmy w pracach [19], [23] i [26] poprzez zastosowanie narzędzi deskryptywnej teorii mnogości, co będzie omówione w drugiej części podrozdziału 3.9.

Niech od teraz $\mathcal{M}$ będzie minimalnym podpotokiem potoku $S_{G,ext}(M)$, a $u \in \mathcal{M}$ idempotentem.

W [25] udowodniliśmy, że $u\mathcal{M}/H(u\mathcal{M})$ jest zewnętrznie definiowalnym uogólnionym uzwarceniem Bohra grupy G (tzn. uogólnionym uzwarceniem Bohra w sensie Glasnera, ale obliczonym w kategorii "zewnętrznie definiowalnych obiektów").

Newelski [Ne4] wskazał naturalny epimorfizm, powiedzmy θ, z $u\mathcal{M}$ w G^*/G^{*00}_M i postawił hipotezę, że jest to izomorfizm. W [GPP2] podano kontrprzykład (mianowicie grupę $G := \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ zdefiniowaną w $M := (\mathbb{R}, +, \cdot)$). W [25] zauważyliśmy, że istnieje naturalny epimorfizm f z $u\mathcal{M}$ w G^*/G^{*000}_M, taki że f złożone z naturalnym epimorfizmem $\pi\colon G^*/G^{*000}_M \to G^*/G^{*00}_M$ pokrywa się z θ. To pokazuje, że każdy przykład, w którym $G^{*000}_M \neq G^{*00}_M$, jest kontrprzykładem na hipotezę Newelskiego.

Początkowym celem w pracy [25] było głębsze zrozumienie następującego ciągu epimorfizmów

$$u\mathcal{M} \overset{f}{\twoheadrightarrow} G^*/G^{*000}_M \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} G^*/G^{*00}_M.$$

Tak naprawdę możemy tu pracować z dowolnym $A \subseteq M$ w miejsce M.

Nasze pierwsze główne twierdzenie mówi, że f jest ciągłym epimorfizmem, który faktoryzuje się przez odwzorowanie ilorazowe z $u\mathcal{M}$ w $u\mathcal{M}/H(u\mathcal{M})$. W szczególności otrzymaliśmy następujący ciąg ciągłych epimorfizmów

$$uM \twoheadrightarrow uM/H(uM) \xrightarrow{\bar{f}} G^*/G^{*000}_A \xrightarrow{\pi} G^*/G^{*00}_A.$$

Na mocy [GPP1] wiemy, że G^*/G^{*00}_M jest tzw. definiowalnym uzwarceniem Bohra grupy G. Zatem powyższe twierdzenie implikuje, że G^*/G^{*000}_M "leży" pomiędzy zewnętrznie definiowalnym uogólnionym uzwarceniem Bohra grupy G a definiowalnym uzwarceniem Bohra tejże grupy.

Niech $Y := \mathrm{cl}(\ker(\bar{f}))$, tzn. Y jest domknięciem $\ker(\bar{f})$ obliczonym w $uM/H(uM)$. Drugi główny wynik pracy [25] (otrzymany przez dość skomplikowany rachunek angażujący dynamikę topologiczną) mówi, że $\bar{f}[Y] = G^{*00}_A/G^{*000}_A$. Oznacza to, że $\bar{f}$ indukuje izomorfizm z $Y/\ker(\bar{f})$ w G^{*00}_A/G^{*000}_A. Tym samym przedstawiliśmy grupę G^{*00}_A/G^{*000}_A jako iloraz zwartej grupy Hausdorffa przez gęstą podgrupę normalną. Zauważmy też, że z poprzedniego twierdzenia natychmiast dostajemy prezentację grupy G^*/G^{*000}_A jako ilorazu zwartej grupy Hausdorffa (mianowicie $uM/H(uM)$) przez (niekoniecznie gęstą) podgrupę normalną.

Ostatnie twierdzenie i wspomniane wnioski są wartościowe, bo dostarczają pewnej odpowiedzi na pytanie, w jaki sposób patrzyć na ilorazy G^{*00}_A/G^{*000}_A oraz G^*/G^{*000}_A jako obiekty matematyczne. W szczególności mają one piękne konsekwencje dotyczące mocy borelowskiej ilorazu G^{*00}_A/G^{*000}_A (patrz część 3.9.2, gdzie rozważany jest znacznie ogólniejszy kontekst), która mierzy złożoność tego ilorazu w deskryptywno teoriomnogościowych terminach. Sensowne może być również popatrzenie na G^{*00}_A/G^{*000}_A z punktu widzenia geometrii nieprzemiennej, a ostatnie twierdzenie daje właśnie reprezentację tego ilorazu jako "typowego" złego ilorazu w geometrii nieprzemiennej.

Istnieje klasyczne pojęcie grupy silnie średniowalnej [Gl]. W [Gl, Chapter IX, Corollary 4.3] stwierdzono, że dla takich grup uogólnione uzwarcenie Bohra pokrywa się z uzwarceniem Bohra. W [25] podaliśmy dowód tego twierdzenia w naszym ogólniejszym, definiowalnym kontekście. Dowiedliśmy mianowicie następującego twierdzenia: Załóżmy, że wszystkie typy w $S_G(M)$ są definiowalne i że grupa G jest definiowalnie silnie średniowalna. Wówczas epimorfizm $\pi \circ \bar{f} : uM/H(uM) \to G^*/G^{*00}_M$ jest izomorfizmem, a więc $G^{*000}_M = G^{*00}_M$.

Ponieważ grupy nilpotentne są [definiowalnie] silnie średniowalne, stosując powyższe twierdzenie dla $M := G$ wzbogaconego o predykaty na wszystkie podzbiory G, otrzymujemy wniosek, że dla każdej grupy nilpotentnej G wzbogaconej o predykaty na wszystkie podzbiory G zachodzi $G^{*000}_G = G^{*00}_G$, co odpowiada na ważną część Pytania 7.

Analizowaliśmy również związki między silną średniowalnością i średniowalnością. W dynamice topologicznej [Gl, Chapter III, Theorem 3.1] pokazuje, że silna średniowalność implikuje średniowalność. Ponieważ istnieją grupy rozwiązalne, które nie są silnie średniowalne, implikacja odwrotna nie jest prawdziwa. Jednak w naszym definiowalnym kontekście i przy założeniu, że struktura, w której pracujemy, ma NIP, udowodniliśmy, że te dwa pojęcia średniowalności się pokrywają. Bez założenia NIP nie wiemy, czy definiowalna silna średniowalność implikuje definiowalną średniowalność.

Na mocy [GPP1] wiemy, że G^*/G^{*00}_M jest definiowalnym uzwarceniem Bohra grupy G. W [25] podaliśmy charakteryzację (w duchu definicji uzwarcenia Bohra) ilorazu

G^*/G^{*000}_M jako obiektu uniwersalnego w pewnej kategorii. Zastosowanie tego w klasycznej dyskretnej sytuacji (przez wzięcie $M := G$ wzbogaconego o predykaty na wszystkie podzbiory) dostarcza "algebraicznej" definicji G^*/G^{*000}_M, która jest nowa w dynamice topologicznej; można by powiedzieć, że G^*/G^{*000}_M jest "słabym uzwarceniem Bohra" grupy G.

Jak już wspominałem, G^*/G^{*00}_M jest definiowalnym uzwarceniem Bohra grupy G. W ostatnim rozdziale pracy [25] podaliśmy charakteryzację zewnętrznie definiowalnego uzwarcenia Bohra grupy G jako ilorazu pewnej podgrupy grupy G^* przez pewną jej spójną składową.

3.9.2. *Dynamika topologiczna i złożoność silnych typów.* Zanim zacznę dyskusję na temat naszego głównego przedmiotu badań, czyli silnych typów, przypomnę krótko podstawowe fakty na temat mocy borelowskich, których będziemy używać do analizy przestrzeni silnych typów.

Rozważania na temat borelowskich mocy borelowskich relacji równoważności określonych na przestrzeniach polskich stanowią istotny i bardzo dobrze rozwinięty fragment współczesnej deskryptywnej teorii mnogości. Przypomnijmy, że dla borelowskich relacji równoważności E i F odpowiednio na przestrzeniach polskich X i Y mówimy, że E jest *borelowsko redukowalna* do F (lub że *moc borelowska* relacji E (lub X/E) jest mniejsza lub równa (symbolicznie, $\leqslant_B$) mocy borelowskiej relacji F (lub Y/F)), gdy istnieje funkcja borelowska $f\colon X \to Y$, taka że $aEb \iff f(a)Ff(b)$ dla wszystkich $a, b \in X$. Porządek mocy borelowskich nie jest liniowy, ale ma on następujący liniowy odcinek początkowy:

$$\Delta_1 \lneq_B \Delta_2 \lneq_B \cdots \lneq_B \Delta_{\mathbb{N}} \lneq_B \Delta_{2^{\mathbb{N}}} \lneq_B E_0,$$

gdzie Δ_X oznacza równość na X, a E_0 relację równości od pewnego miejsca na zbiorze Cantora $2^{\mathbb{N}}$. W szczególności dychotomia Silvera mówi, że dla każdej borelowskiej relacji równoważności E albo $E \leqslant_B \Delta_{\mathbb{N}}$, albo $\Delta_{2^{\mathbb{N}}} \leqslant_B E$. Z kolei słynna dychotomia Harringtona-Kechrisa-Louveau mówi, że dla każdej borelowskiej relacji równoważności E albo $E \leqslant_B \Delta_{2^{\mathbb{N}}}$ (i wtedy mówimy, że E jest *gładka*), albo $E_0 \leqslant_B E$. Można też rozważać moce borelowskie relacji, które nie są borelowskie, co często robimy w celu uzyskania możliwie najogólniejszych wyników.

Od teraz pracujemy w modelu monstrum $\mathfrak{C}$ dowolnej teorii T; $B \subseteq \mathfrak{C}$ jest małym zbiorem parametrów. Relacje równoważności rozważane poniżej określone są na produktach (niekoniecznie skończenie wielu) sortów modelu $\mathfrak{C}$. Mówimy, że relacja równoważności jest *ograniczona*, gdy ma ograniczenie wiele klas.

Klasy ograniczonych, B-niezmienniczych relacji równoważności rozdrabniających relację posiadania tego samego typu nad B nazywamy *silnymi typami* nad B (nadużywając nieco terminologii, niekiedy same relacje, a nie ich klasy, zwane są silnymi typami). Pewne szczególne silne typy zdefiniowane poniżej odgrywają fundamentalną rolę w teorii modeli, szczególnie w analizie teorii stabilnych, prostych oraz z NIP-em:

- *Silne typy Shelaha* nad B to klasy relacji $E_{B,Sh}$ zdefiniowanej jako przekrój wszystkich B-definiowalnych relacji równoważności o skończenie wielu klasach.
- *Silne typy Kima-Pillaya* nad B to klasy relacji $E_{B,KP}$ zdefiniowanej jako najdrobniejsza ograniczona, B-typowo-definiowalna relacja równoważności.

- *Silne typy Lascara* nad B to klasy relacji $E_{B,L}$ zdefiniowanej jako najdrobniejsza B-niezmiennicza relacja równoważności.

Bez zmniejszenia ogólności zakładamy, że $B = \emptyset$ i zazwyczaj będziemy pomijać $\emptyset$ w notacji.

Gdy E jest ograniczoną, niezmienniczą relacją równoważności zdefiniowaną na zbiorze niezmienniczym X, to na zbiorze X/E wprowadzamy *topologię logiczną* przez powiedzenie, że podzbiór jest domknięty, gdy jego przeciwobraz przez oczywiste odwzorowanie ilorazowe jest typowo-definiowalny (z parametrami).

Omówimy teraz krótko pracę [1], w której badaliśmy przestrzenie topologiczne P/E, gdzie E jest ograniczoną, typowo-definiowalną relacją równoważności na produkcie P skończenie wielu sortów z $\mathfrak{C}$. Podstawowy fakt mówi, że gdy E jest ograniczona i typowo-definiowalna, to P/E jest zwartą przestrzenią Hausdorffa. W [1] pokazaliśmy, że jeśli teoria nie jest mała, to każdą zwartą przestrzeń metryczną można zrealizować jako iloraz P/E dla pewnych P i E jak wyżej. Opisaliśmy również topologiczne własności przestrzeni P/E w zależności od tego, jak relacja E związana jest z relacjami $\equiv$ (tzn. posiadania tego samego typu), E_{Sh} oraz E_{KP}. Korzystając z tego, podaliśmy nowy, topologiczny dowód twierdzenia Kima, mówiącego, że $E_{Sh} = E_{KP}$ na ciągach skończonych w dowolnej małej teorii. Ponadto wprowadziliśmy pojęcie relacji zbalansowanej i przy jego użyciu scharakteryzowaliśmy, kiedy grupa homeomorfizmów przestrzeni P/E (gdzie P jest silnym typem Shelaha nad $\emptyset$ i E rozdrabnia E_{Sh}) indukowana przez automorfizmy $\mathfrak{C}$ jest grupą Liego. Znaleźliśmy również kilka przykładów relacji niezbalansowanych.

Wróćmy do głównego nurtu. Załóżmy, że E jest ograniczoną, niezmienniczą relacją równoważności. W przypadku gdy E jest typowo-definiowalna, topologia logiczna jest zwarta, Hausdorffa, zaś w sytuacji gdy E jest tylko niezmiennicza, topologia logiczna jest wciąż zwarta, ale niekoniecznie Hausdorffa, a więc nie mówi ona wiele w tym przypadku. Naturalne staje się więc pytanie, jak mierzyć złożoność ograniczonych, niezmienniczych relacji równoważności i w jaki sposób rozważać ilorazy przez nie jako obiekty matematyczne. Można oczywiście badać moce takich ilorazów. Dokładniejszą informację uzyskamy jednak badając moce borelowskie (w sensie deskryptywnej teorii mnogości), co zostało sformalizowane w [19] dla relacji E_L i uogólnione do dowolnych ograniczonych, niezmienniczych relacji w [23] i [26].

W celu zastosowania mocy borelowskich w naszym teoriomodelowym kontekście zakładamy, że język jest przeliczalny i ustalamy przeliczalny model M. Rozważmy ograniczoną, niezmienniczą relację równoważności E określoną na typowo-definiowalnym (nad $\emptyset$) podzbiorze X produktu przeliczalnie wielu sortów z $\mathfrak{C}$. Otrzymujemy wtedy relację równoważności E^M na przestrzeni typów $S_X(M)$ zdefiniowaną przez powiedzenie, że dwa typy są E^M-równoważne, gdy pewne (równoważnie, wszystkie) ich realizacje są E-równoważne. Powiemy, że E jest *borelowska*, *analityczna* lub F_σ, gdy E^M jest taka. W [23] sprawdziliśmy, że definicje te nie zależą od wyboru M. Ponieważ E^M jest określona na (zwartej) przestrzeni polskiej $S_X(M)$, pojęcie mocy borelowskiej omówione powyżej może być zastosowane do relacji E^M. W [23] uzasadniliśmy, że moc borelowska relacji E^M nie zależy od wyboru modelu M i zdefiniowaliśmy *moc borelowską* relacji E jako moc borelowską relacji E^M. W szczególności mamy pojęcie gładkości relacji E.

Newelski udowodnił w [Ne3], że dla dowolnego ciągu $\bar{a}$ albo $E_L\restriction_{[\bar{a}]_{E_{KP}}}$ jest totalna (tzn. ma tylko jedną klasę), albo ma ona co najmniej $2^{\aleph_0}$ klas. Zakładając, że język oraz ciąg $\bar{a}$ są przeliczalne, w ostatnim warunku dostajemy dokładnie $2^{\aleph_0}$ klas. Przy tym założeniu przeliczalności, w terminach mocy borelowskich twierdzenie Newelskiego mówi, że albo $E_L\restriction_{[\bar{a}]_{E_{KP}}}$ jest totalna, albo $\Delta_{2^{\mathbb{N}}} \leqslant_B E$. W [19] sformułowaliśmy hipotezę wzmacniającą to twierdzenie w następujący sposób: albo $E_L\restriction_{[\bar{a}]_{E_{KP}}}$ jest totalna, albo niegładka (równoważnie, $E_0 \leqslant_B E$). W tej samej pracy sprawdziliśmy, że hipoteza ta zachodzi w znanych konkretnych przykładach; skonstruowaliśmy również nowy przykład, w którym moc borelowska relacji E_L obciętej do typu Kima-Pillaya wynosi dokładnie E_0.

Nasza hipoteza została udowodniona w pięknej pracy [KMS], co zostało później uogólnione niezależnie w [KaMi] oraz w [23] do pewnej szerszej klasy ograniczonych relacji równoważności typu F_σ. W [23] skonstruowaliśmy przykłady relacji równoważności pokazujące istotność pewnych założeń w tym uogólnieniu. Udowodniliśmy również analogiczne twierdzenie dla języka nieprzeliczalnego, używające wprowadzonego przez nas pojęcia topologii sub-Vietorisa. Twierdzenia tego użyliśmy w kontekście grup, odpowiadając na pewne pytania z pracy [24]. Jednym z wniosków w pracy [23] jest twierdzenie, w którym porównujemy fundamentalne własności ograniczonych relacji równoważności typu F_σ, w szczególności gładkość oraz typową definiowalność, pokazując, że są one równoważne dla tzw. orbitalnych na typach (pojęcie wprowadzone w [23]), ograniczonych relacji równoważności typu F_σ zdefiniowanych na jednym zupełnym $\emptyset$-typie lub rozdrabniających E_{KP} (a nasze przykłady pokazały istotność ostatniego założenia). Postawiliśmy pytanie, czy można tu usunąć założenie dotyczące orbitalności oraz tego, że relacja jest F_σ. Podobny problem sformułowano w [KaMi] (jednak "mniej odważnie", skupiając się wyłącznie na usunięciu założenia orbitalności). Podczas gdy teoretycznie istnieje szansa na usunięcie założenia orbitalności metodami z prac [KMS], [KaMi] oraz [23], uogólnienie do relacji, które nie są F_σ, wydaje się być poza zasięgiem tych metod, gdyż bazują one na pewnym pojęciu odległości, istnienie którego wynika z faktu, że rozważane relacje były typu F_σ. I tu właśnie wkracza praca [26] i rozwinięta w niej dynamika topologiczna, rozwiązując wszystkie powyższe problemy. Zanim jednak przejdę do omówienia pracy [26], dokończę omawiać pracę [19]. W pracy [19] rozważaliśmy również naszą hipotezę (tę udowodnioną później w [KMS]) w kontekście z pracy [24], uzyskując kilka pozytywnych rezultatów, jak również opisując pewien scenariusz, który mógłby prowadzić do kontrprzykładu. Ponieważ jednak okazało się, że hipoteza jest prawdziwa, używając tego scenariusza, udowodniliśmy w pracy [24], że techniczny warunek na temat 2-kocyklu w głównym twierdzeniu pracy [24] jest nie tylko wystarczający, lecz również konieczny do tego, by rozważane tam spójne składowe były różne (patrz podrozdział 3.8). Oprócz omówionej powyżej hipotezy (która stała się motywacją do napisania kilku kolejnych ważnych prac) w pracy [19] sformułowaliśmy kilka innych naturalnych i nietrywialnych problemów dotyczących silnych typów Lascara, które powinny przyczynić się do dalszego rozwoju tej tematyki. Ograniczone, niezmiennicze relacje równoważności, w szczególności problemy z [19], są tematem rozprawy doktorskiej przygotowywanej pod moim kierunkiem przez Tomasza Rzepeckiego. Nad pewnymi problemami z [19] od prawie dwóch lat współpracujemy również z I. Kaplanem.

Naszą początkową motywacją w pracy [26] była chęć rozwinięcia dynamiki topologicznej dla grupy $\mathrm{Aut}(\mathfrak{C})$ automorfizmów modelu monstrum przez analogię do tego, co zrobiliśmy w pracy [25] dla grupy definiowalnej, i zastosowanie jej do uzyskania nowych informacji na temat grup Galois rozważanej (dowolnej) teorii. Potem okazało się, że otrzymane wyniki pozwoliły nam udowodnić bardzo ogólne twierdzenia o złożoności przestrzeni silnych typów, odpowiadając w szczególności na wyżej wspomniane pytania z prac [KaMi] i [23].

Definicje grup Galois teorii pierwszego rzędu pominę, odsyłając do podrozdziału 1.3 pracy [26]; przypomnę tylko, że są to pewne ilorazy grupy $\mathrm{Aut}(\mathfrak{C})$. Główne grupy Galois $\mathrm{Gal}_{Sh}(T)$ (grupa Galois Shelaha), $\mathrm{Gal}_{KP}(T)$ (grupa Galois Kima-Pillaya) oraz $\mathrm{Gal}_L(T)$ (grupa Galois Lascara) są fundamentalnymi niezmiennikami teorii T. Okazują się one być ilorazami pewnej przestrzeni typów, co pozwala wyposażyć je w topologię ilorazową. Wówczas pierwsze dwie grupy stają się zwartymi grupami Hausdorffa, a ostatnia też jest zwartą grupą, ale niekoniecznie Hausdorffa. Domknięcie jedności w $\mathrm{Gal}_L(T)$ oznaczamy przez $\mathrm{Gal}_0(T)$. Wtedy $\mathrm{Gal}_{KP}(T)$ jest ilorazem $\mathrm{Gal}_L(T)/\mathrm{Gal}_0(T)$. Podobnie jak dla silnych typów czy ilorazów przez spójne składowe, ponieważ topologia na $\mathrm{Gal}_L(T)$ nie musi być Hausdorffa, a dziedziczona topologia na $\mathrm{Gal}_0(T)$ jest trywialna, jednym z głównych, ogólnych problemów dotyczących grupy Galois Lascara jest pytanie, w jaki sposób grupy $\mathrm{Gal}_L(T)$ oraz $\mathrm{Gal}_0(T)$ rozważać jako obiekty matematyczne. Podobnie jak dla ilorazów przez spójne składowe, również tutaj uzyskaliśmy odpowiedź na to pytanie, używając dynamiki topologicznej, ale dla grupy $\mathrm{Aut}(\mathfrak{C})$ zamiast definiowalnej grupy G.

W celu rozwinięcia dynamiki dla $\mathrm{Aut}(\mathfrak{C})$ i powiązania jej z grupami Galois teorii T obliczamy te grupy, pracując w większym modelu monstrum $\mathfrak{C}' \succ \mathfrak{C}$.

Niech $\bar{c}$ będzie ciągiem wszystkich elementów modelu $\mathfrak{C}$. Rozważamy przestrzeń $S_{\bar{c}}(\mathfrak{C})$ typów $\mathrm{tp}(\bar{a}/\mathfrak{C})$ dla $\bar{a}$ przebiegającego zbiór realizacji (w $\mathfrak{C}'$) typu $\mathrm{tp}(\bar{c}/\emptyset)$. Przestrzeń tę można w naturalny sposób traktować jako $\mathrm{Aut}(\mathfrak{C})$-potok (gdzie $\mathrm{Aut}(\mathfrak{C})$ wyposażona jest w topologię zbieżności punktowej). Półgrupę Ellisa tego potoku oznaczmy przez EL. Następnie ustalmy minimalny, lewy ideał $\mathcal{M}$ półgrupy EL oraz idempotent $u \in \mathcal{M}$. Otrzymujemy wówczas grupę Ellisa $u\mathcal{M}$ wyposażoną w τ-topologię (która jest zwarta, T_1 (ale niekoniecznie Hausdorffa) i działanie grupowe jest ciągłe na każdej współrzędnej z osobna) oraz iloraz $u\mathcal{M}/H(u\mathcal{M})$ będący (topologiczną) zwartą grupą Hausdorffa.

W [26] znaleźliśmy naturalny epimorfizm $f \colon u\mathcal{M} \to \mathrm{Gal}_L(T)$. Używając idei podobnych do tych z [25], udowodniliśmy, że f jest ciągły i faktoryzuje się przez odwzorowanie ilorazowe z $u\mathcal{M}$ w $u\mathcal{M}/H(u\mathcal{M})$. W szczególności otrzymaliśmy następujący ciąg ciągłych epimorfizmów

$$u\mathcal{M} \twoheadrightarrow u\mathcal{M}/H(u\mathcal{M}) \overset{\bar{f}}{\twoheadrightarrow} \mathrm{Gal}_L(T) \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}_{KP}(T).$$

Wynika stąd, że $\mathrm{Gal}_L(T)$ jest ilorazem zwartej grupy Hausdorffa (mianowicie $u\mathcal{M}/H(u\mathcal{M})$) przez pewną podgrupę normalną.

Adaptując jeden z dowodów z [25], uzyskaliśmy następujące twierdzenie: Dla $Y := \ker(\bar{f})$ niech $\mathrm{cl}(Y)$ będzie domknięciem Y w $u\mathcal{M}/H(u\mathcal{M})$. Wtedy

$\bar{f}[\mathrm{cl}(Y)] = \mathrm{Gal}_0(T)$, a więc $\bar{f}$ obcięte do $\mathrm{cl}_\tau(Y)$ indukuje izomorfizm między $\mathrm{cl}_\tau(Y)/Y$ i $\mathrm{Gal}_0(T)$. W szczególności $\mathrm{Gal}_0(T)$ jest ilorazem zwartej grupy Hausdorffa przez gęstą podgrupę normalną.

Następnie zastosowaliśmy to do silnych typów. Rozważmy mianowicie dowolny ciąg $\bar{\alpha}$ z $\mathfrak{C}$ oraz ograniczoną, niezmienniczą relację równoważności na zbiorze realizacji typu $\mathrm{tp}(\bar{\alpha}/\emptyset)$ w $\mathfrak{C}'$ (zbiór ten oznaczamy przez $[\bar{\alpha}]_\equiv$). Składając f oraz $\bar{f}$ z pewną naturalną funkcją $g_E\colon \mathrm{Gal}_L(T) \to [\bar{\alpha}]_\equiv/E$, otrzymaliśmy dwie ciągłe surjekcje: $h_E\colon u\mathcal{M} \to [\bar{\alpha}]_\equiv/E$ oraz $\bar{h}_E\colon u\mathcal{M}/H(u\mathcal{M}) \to [\bar{\alpha}]_\equiv/E$.

$$\begin{tikzcd}
u\mathcal{M} \arrow[rrrd, bend left, two heads, "h_E"] \arrow[rrd, two heads, "f"] \arrow[rd, two heads, "j"] \arrow[rdd, hook] & & & \\
& u\mathcal{M}/H(u\mathcal{M}) \arrow[r, two heads, "\bar{f}"] \arrow[rr, bend left, two heads, "\bar{h}_E"] & \mathrm{Gal}_L(T) \arrow[r, two heads, "g_E"] & {[\bar{\alpha}]_{\equiv}/E} \\
& \mathcal{M} \arrow[r, hook] & EL = EL(S_{\bar{c}}(\mathfrak{C})) \arrow[u, two heads, "\hat{f}"] &
\end{tikzcd}$$

FIGURE 1. Przemienny diagram rozważanych funkcji.

Używając naszych twierdzeń omówionych powyżej, udowodniliśmy, że $\bar{h}_E$ jest odwzorowaniem ilorazowym (tzn. podzbiór przeciwdziedziny jest domknięty wtedy i tylko wtedy, gdy jego przeciwobraz jest domknięty). Niech $\ker(\bar{h}_E) := \{pH(u\mathcal{M}) : \bar{h}_E(pH(u\mathcal{M})) = \bar{\alpha}/E\}$. Jest to (niekoniecznie normalna) podgrupa grupy $u\mathcal{M}/H(u\mathcal{M})$. Korzystając z ostatniego rezultatu, uzyskaliśmy następujące twierdzenie, które jest kluczowym narzędziem w dalszych zastosowaniach do gładkości ograniczonych, niezmienniczych relacji równoważności.

Twierdzenie 8. $\bar{h}_E[\mathrm{cl}(\ker(\bar{h}_E))] = \mathrm{cl}(\bar{\alpha}/E)$ *(gdzie domknięcie* $\mathrm{cl}(\bar{\alpha}/E)$ *obliczone jest w* $[\bar{\alpha}]_\equiv/E$ *wyposażonym w topologię logiczną). Oznacza to, że* $\bar{h}_E$ *obcięte do* $\mathrm{cl}(\ker(\bar{h}_E))$ *indukuje bijekcję między* $\mathrm{cl}(\ker(\bar{h}_E))/\ker(\bar{h}_E)$ *i* $\mathrm{cl}(\bar{\alpha}/E)$. *Zatem* $\mathrm{cl}(\bar{\alpha}/E)$ *jest ilorazem zwartej grupy Hausdorffa przez (niekoniecznie normalną) gęstą podgrupę.*

Mówiąc nieściśle, powyższe twierdzenie pozwala zredukować problem złożoności relacji E do problemu złożoności relacji leżenia w tej samej warstwie podgrupy $\ker(\bar{h}_E)$ zwartej grupy Hausdorffa $\mathrm{cl}(\ker(\bar{h}_E))$. Wówczas można zastosować wiedzę z teorii grup zwartych w celu uzyskania nowych informacji o mocy borelowskiej relacji E. Idea ta doprowadziła nas do bardzo ogólnych twierdzeń. Dla uproszczenia rozważymy tu sytuację, kiedy relacja określona jest na zbiorze realizacji jednego zupełnego $\emptyset$-typu (w pracy [26] wyniki są jeszcze ogólniejsze).

Twierdzenie 9. *Załóżmy, że język jest przeliczalny. Wówczas, jeśli E jest dowolną, ograniczoną, niezmienniczą relacją równoważności określoną na $p(\mathfrak{C})$ dla pewnego $p \in S(\emptyset)$ przeliczalnie wielu zmiennych, to albo E jest typowo-definiowalna, albo jest niegładka. (Równoważnie, E jest typowo-definiowalna wtedy i tylko wtedy, gdy jest gładka.)*

Twierdzenie 10. *(Tutaj język jest dowolny.) Niech E będzie ograniczoną, niezmienniczą relacją równoważności określoną na zbiorze realizacji pewnego zupełnego $\emptyset$-typu i załóżmy, że E można otrzymać przy pomocy operacji Souslina zastosowanej do zbiorów typowo-definiowalnych. Wtedy albo E jest relatywnie definiowalna (a więc ma skończenie wiele klas), albo ma ona co najmniej $2^{\aleph_0}$ klas.*

Ostatnie dwa twierdzenia można podsumować następującą trychotomią, która jest wieńczącą konkluzją naszych rozważań, wiążącą gładkość, typową definiowalność, relatywną definiowalność oraz liczbę klas borelowskich (ogólniej, analitycznych) relacji równoważności.

Twierdzenie 11. *Załóżmy, że język jest przeliczalny. Niech E będzie borelowską (lub, ogólniej, analityczną) relacją równoważności określoną na $p(\mathfrak{C})$ dla pewnego $p \in S(\emptyset)$ przeliczalnie wielu zmiennych. Wówczas zachodzi dokładnie jedna z następujących trzech możliwości:*
1. *E jest relatywnie definiowalna (na $p(\mathfrak{C})$), gładka i ma skończenie wiele klas,*
2. *E nie jest relatywnie definiowalna, ale jest typowo-definiowalna, gładka i ma $2^{\aleph_0}$ klas,*
3. *E nie jest ani typowo-definiowalna, ani gładka i ma $2^{\aleph_0}$ klas.*

References

[Ad1] H. Adler, *A geometric introduction to forking and thorn-forking*, Journal of Mathematical Logic 9, 1-20, 2009.

[Ad2] H. Adler, *Strong theories, burden, and weight*, preprint, 2007.

[BCM] W. Baur, G. Cherlin, A. Macintyre, *Totally categorical groups and rings*, Journal of Algebra 57, 407-440, 1979.

[BaRo] J. Baldwin, B. Rose, $\aleph_0$*-categoricity and stability of rings*, Journal of Algebra 45, 1-16, 1977.

[Ba] A. Baudisch. *A new uncountably categorical group*, Transactions of American Mathematical Society 348, 3889-3940, 1996.

[BeDe] F. Benoist, F. Delon, *Questions de corps de définition pour les variétés abéliennes en caractéristique positive*, Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu 7, 623-639, 2008.

[Ca] R. Camerlo, *Dendrites as Polish structures*, Proceedings of American Mathematical Society 139, 2217-2225, 2011.

[CoPi] A. Conversano, A. Pillay, *Connected components of definable groups and o-minimality I*, Adv. Math. 231, 605-623, 2012.

[Do1] J. Dobrowolski, *New examples of small Polish structures*, Journal of Symbolic Logic 78, 969-976, 2013.

[Do2] J. Dobrowolski, *Topologies induced by group actions*, Topology and its Applications 189, 136-146, 2015.

[EaOn] C. Ealy, A. Onshuus, *Characterizing rosy theories*, Journal of Symbolic Logic 72, 919-940, 2007.

[EvWa] D. Evans, F. Wagner, *Supersimple ω-categorical groups and theories*, Journal of Symbolic Logic 65, 767-776, 2000.

[Fe] U. Felgner, $\aleph_0$*-categorical stable groups*, Mathematische Zeitschrift 160, 27-49, 1978.

[Gi] J. Gismatullin, *Model theoretic connected components of groups*, Israel J. Math. 184, 251-274, 2011.

[GiNe] J. Gismatullin, L. Newelski, *G-compactness and groups*, Arch. Math. Logic. 47, 479-501, 2008.

[GPP1] J. Gismatullin, D. Penazzi, A. Pillay, *On compactifications and the topological dynamics of definable groups*, Annals of Pure and Applied Logic 165, 552-562, 2014.

[GPP2] J. Gismatullin, D. Penazzi, A. Pillay, *Some model theory of* $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$, submitted, 2013.

[Gl] S. Glasner, *Proximal Flows*, LNM 517, Springer, Germany, 1976.

[Gr] R. I. Grigorchuk, *Some results on bounded cohomology.* In Combinatorial and geometric group theory (Edinburgh, 1993), 111-163, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 204, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.

[Hr1] E. Hrushovski, *The Mordell-Lang conjecture for function fields*, Journal of American Mathematical Society 9, 667-690, 1996.

[Hr2] E. Hrushovski, *The Manin-Mumford conjecture and the model theory of difference fields*, Ann. Pure Appl. Logic 112, 43–115, 2001.

[HrPi] E. Hrushovski, A. Pillay, *On NIP and invariant measures*, Journal of European Math. Society 13, 1005-1061, 2011.

[HPP] E. Hrushovski, Y. Peterzil, A. Pillay, *Groups, measures and the NIP*, Journal of the AMS 21, 563-596, 2008.

[KaMi] I. Kaplan, B. Miller, *An embedding theorem of E_0 with model theoretic applications*, J. Math. Log. 14.2, p. 1450010, 2014.

[KMS] I. Kaplan, B. Miller, P. Simon, *The Borel cardinality of Lascar strong types*, J. Lond. Math. Soc. 90, 609-630, 2014.

[Ko] J. Koenigsmann, *Definable Valuations*, In Delon, Dickmann, and Gondard, editors, Seminaire Structures algébriques ordonnées Paris VII, 1994.

[Ma] H. D. Macpherson, *Absolutely ubiquitous structures and $\aleph_0$-categorical groups*, Quart. J. Math. Oxford (2) 39, 483-500, 1988.

[NPR] A. Nesin, A. Pillay; V. Razenj, *Groups of dimension two and three over o-minimal structures*, Annals of Pure and Applied Logic 53, 279-296, 1991.

[Ne1] L. Newelski, *Small profinite groups*, Journal of Symbolic Logic 66, 859-872, 2001.

[Ne2] L. Newelski, *Small profinite structures*, Transactions of American Mathematical Society 354, 925-943, 2002.

[Ne3] L. Newelski, *The diameter of a Lascar strong type*, Fundamenta Mathematicae 176, 157-170, 2003.

[Ne4] L. Newelski, *Topological dynamics of definable group actions*, Journal of Symbolic Logic 74, 50-72, 2009.

[Ne5] L. Newelski, *Model theoretic aspects of the Ellis semigroup* 190, Israel J. Math., 477-507, 2011.

[On] A. Onshuus, *Properties and consequences of thorn-independence*, Journal of Symbolic Logic 71, 1-21, 2006.

[Pe] Y. Peterzil, *Pillay's conjecture and its solution – a survey*, In: *Logic Colloquium 2007*, 177-203, Lect. Notes Log. 35, Assoc. Symbol. Logic, La Jolla, CA, 2010.

[PeSt] Y. Peterzil, S. Starchenko. *Definable homomorphisms of abelian groups in o-minimal structures*, Annals of Pure and Applied Logic 101, 1-27, 2000.

[Pi] J. Pila, *O-minimality and the André-Oort conjecture for C^n*, Annals Math. 173, 1779-1840, 2011.

[PiTa] A. Pillay, P. Tanović, *Generic stability, regularity, and quasiminimality*, In: Models, Logics and Higher-Dimensional Categories (A Tribute to the Work of Mihály Makkai), CRM Proceedings and Lecture Notes 53, 189-211, 2011.

[PiZi] A. Pillay, M. Ziegler, *Jet spaces of varieties over differential and difference fields*, Selecta Mathematica (N.S.) 9, 579-599, 2003.

[Po1] B. Poizat, *Stable groups*, Mathematical Surveys and Monographs (87), American Mathematical Society, Providence, 2001 (published in French in 1987).

[Po2] B. Poizat, *Groups of small Cantor rank*, J. Symbolic Logic 75, 346-354, 2010.

[Re] J. Reineke, *Minimale Gruppen*, Zeitsch. Math. Logik Grundl. Math. 21, 357-359, 1975.

[Ra] V. Razenj, *One-dimensional groups over an o-minimal structure*, Annals of Pure and Applied Logic 53, 269-277, 1991.

[Re] U. Rehmann, *Linear Algebraic Groups and K-theory.* In: Friedlander E., Kuku A., Pedrini C. (eds.) *Some recent developments in algebraic K-theory*, ICTP Lecture Notes, 23. Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics, Trieste, 2008.

[Sh1] S. Shelah, *Dependent first order theories, continued*, Israel Journal of Mathematics 173, 1-60, 2009.

[Sh2] S. Shelah, *Strongly dependent theories*, Israel J. Math. 204, 1-83, 2014.

[Si] P. Simon, *A guide to NIP theories*, to be published in the "Lecture Notes in Logic" series by ASL and Cambridge University Press.

[St] R. Steinberg, *Lectures on Chevalley groups.* Notes prepared by John Faulkner and Robert Wilson, Yale University, New Haven, Conn., 1968.

[Ta] P. Tanović, *Minimal first-order structures*, Annals of Pure and Applied Logic 162, 948-957, 2011.

[Wa1] F. Wagner, *Minimal fields*, J. Symbolic Logic 65, 1833-1835, 2000.

[Wa2] F. Wagner, *Small profinite m-stable groups*, Fundamenta Mathematicae 176, 181-191, 2003.

[Wh] W. H. Wheeler *Amalgamation and elimination of quantifiers for theories of fields* Proc. Amer. Math. Soc. 77, 243-250, 1979.

4. Nagrody i stypendia

2013: Nagroda im. W. Sierpińskiego Wydziału III PAN.
2011: Nagroda rektorska za osiągnięcia naukowe uzyskane w 2010 roku.
2011: Habilitacja z wyróżnieniem.
2010-2013: Stypendium Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego dla wybitnych młodych naukowców.
2008-2010: Stypendium habilitacyjne.
2007: Nagroda im G. Białkowskiego za najwybitniejszą pracę doktorską w dziedzinie matematyki obronioną w latach 2004-2006 przyznana przez Towarzystwo Popierania i Krzewienia Nauk oraz Fundację na Rzecz Nauki Polskiej.
2006: Nagroda im. K. Kuratowskiego dla młodych matematyków przyznana przez PTM oraz Instytut Matematyczny PAN.
2005: Nagroda Ministra Edukacji Narodowej i Sportu za rozprawę doktorską.
2005: Krajowe stypendium dla najzdolniejszych młodych naukowców przyznane przez Fundację na Rzecz Nauki Polskiej.
2004: Doktorat z wyróżnieniem.
2004: Stypendium im. Stanisława Saksa przyznane przez Fundację Stypendialną Matematyków Wrocławskich.
2003: Stypendium naukowe dla najlepszych doktorantów przyznane przez Instytut Matematyczny PAN.
2000: III nagroda w Konkursie im. J. Marcinkiewicza na najlepszą pracę magisterską.
1997-2000: Stypendium Ministra Edukacji Narodowej za wysokie wyniki w nauce i szczególne osiągnięcia w pracy naukowej.
1996: Stypendium Fundacji Stypendialnej Matematyków Wrocławskich.
1995: Medal „Primus Inter Pares" za wybitne osiągnięcia w szkole średniej.
1995: Srebrny medal w Konkursie Prac Uczniowskich "Delty".
1995: Tytuł laureata 18-tych Austriacko-Polskich Zawodów Matematycznych w Wiedniu.
1994: Brązowy medal na 35-tej Międzynarodowej Olimpiadzie Matematycznej w Hong-Kongu.
1994, 1995: Stypendium Ministra Edukacji Narodowej za wysokie wyniki w nauce.
1994, 1995: Tytuły laureata XLV i XLVI Olimpiady Matematycznej.

1993: Wyróżnienie na XLIV Olimpiadzie Matematycznej.
1992-1995: Stypendium Krajowego Funduszu na Rzecz Dzieci.
1991: Pierwsze miejsce w Wojewódzkim Konkursie Matematycznym dla uczniów szkół podstawowych w Jeleniej Górze.

5. Udział w grantach

2013-2016: Kierownik w trzyletnim grancie „Opus" NCN nr 2012/07/B/ST1/03513.
2010-2013: Wykonawca w trzyletnim grancie MNiSW nr N N201 54938 pod kierownictwem L. Newelskiego.
2007-2010: Visiting Fellow w trzyletnim grancie pod kierownictwem A. Pillaya, przyznanym przez Engineering and Physical Sciences Research Council (the UK Government's funding agency), nr EP/F009712/1.
2007-2010: Wykonawca w trzyletnim grancie MNiSW nr N201 032/2231 pod kierownictwem L. Newelskiego.
2006-2008: Redukcja obowiązków dydaktycznych w ramach postdoka na UIUC sponsorowana przez grant NSF nr DMS 0300639 pod kierownictwem A. Pillay'a i C.W. Hensona.
2003-2004: Dwuletni grant promotorski KBN.

6. Konferencje i inne wyjazdy

Udział w konferencjach na zaproszenie
2015: Konferencja "Neostability Theory", Oaxaca, Meksyk: referat (45 minut).
2014: Konferencja "MidWest Model Theory Day", Chicago, USA: referat godzinny.
2014: Konferencja "Models and Groups III", Stambuł, Turcja: referat (75 minut).
2014: Classification Theory Workshop, Daejeon, Korea Południowa: referat godzinny.
2014: Konferencja "Recent developments in the applications of model theory to algebraic, analytic and diophantine geometry", Edynburg, Szkocja.
2014: ASL Annual Meeting, Boulder, Colorado, USA: referat (40 minut) w sekcji specjalnej z teorii modeli.
2013: Konferencja "Mostowski 100", Warszawa: referat godzinny.
2013: 5 Forum Matematyków Polskich, Rzeszów: referat plenarny (45 minut).
2013: Konferencja "The 9-th Intenational Algebraic Conference in Ukraine", Lwów: referat plenarny (45 minut).
2013: Konferencja "Model Theory: Groups, Geometry and Combinatorics", Oberwolfach, Niemcy: referat 30-minutowy.
2012: Konferencja "Antalya Algebra Days XIV", Cesme, Turcja: referat godzinny.
2012: Konferencja "Neostability theory", Banff, Kanada: referat 45-minutowy.
2011: Mini-school in model theory, Turyn, Włochy: referat 40-minutowy.
2010: Konferencja "Around Valued Fields and Dependent Theories", Oberwolfach, Niemcy: referat godzinny.
2009: Konferencja "Model Theory" w Będlewie: referat półgodzinny.
2009: Konferencja "Logicum Urbanae Lugduni", Lyon, Francja: referat godzinny.
2009: Konferencja "Stability Theoretic Methods in Unstable Theories", Banff, Kanada.

2008: Logic Colloquium 2008, Berno, Szwajcaria: referat (45 min) w sekcji specjalnej z teorii modeli.
2008: Konferencja "Around Classification Theory" w Leeds: referat godzinny.
2008: Wykład w serii "Logic Colloquium" na University of California at Los Angeles: referat godzinny.
2007: Konferencja "Model Theory and Groups", Oberwolfach, Niemcy: referat półgodzinny.
2006: Association for Symbolic Logic 2006 Annual Meeting w Montrealu, Kanada: referat w sekcji specjalnej z teorii modeli.

Zaproszenia na przyszłe konferencje
2016: Zostałem zaproszony do wygłoszenia 4-godzinnego tutorialu pt. *"Dynamika topologiczna i teoria modeli"* w czasie "Thematic Program on Model Theory", który odbędzie się w Centrum Matematyki na University of Notre Dame w USA w dniach 6-24 czerwca, 2016.
2016: Konferencja "Model Theory: groups, geometry and combinatorics", Oberwolfach, Niemcy, 3-9 stycznia, 2016.
2016: Zostałem zaproszony do wygłoszenia plenarnego odczytu na konferencji "2016 Winter Meeting of the Association for Symbolic Logic in conjunction with the Joint Mathematics Meetings" w Seattle, USA, w dniach 6-9 stycznia, 2016. Jednak z powodu kolizji terminów z powyższą konferencją w Oberwolfach byłem zmuszony zrezygnować z tego zaproszenia.

Konferencje z referatem zgłoszonym: Logic Colloquium 2005 (Ateny), Logic Colloquium 2004 (Turyn), Logic Colloquium 2003 (Helsinki), "Groups and Group Rings" (Wisła 2003), Logic Colloquium 2002 (Muenster), "Simple Theories" (Marsylia 2002), Logic Colloquium 2001 (Wiedeń).

Konferencje bez referatu: Konferencja "When topological dynamics meets model theory" (Marsylia 2015), Konferencja "Model theory in geometry and arithmetic" (Berkeley 2014), Konferencja "Model Theory 2013" (Ravello 2013), Konferencja "Model theory of groups (interactions between model theory and geometrical group theory)" (Luminy, 2011), Logic Colloquium 2011 (Barcelona), Konferencja "Recent developments in model theory" (Oleron, 2011), Logic Colloquium 2010 (Paryż), "Model Theory in Wrocław" (Wrocław, 2009), Końcowa konferencja sieci MODNET (Barcelona, 2008), "Model Theory Midwest Meeting" (Chicago 2008), "Logic and Mathematics" (Urbana 2008), Logic Colloquium 2007 (Wrocław), Model Theory Midwest Meeting (Columbus, 2005), "Model Theory, Algebraic and Analytic Geometry" (Cambridge 2005), "Pure Model Theory"(Norwich 2005), "An Introduction to Recent Applications of Model Theory" (Cambridge 2005), "Groups, Geometry and Logic" (Marsylia 2004), "Algebra and Discrete Mathematics" (Hattingen 2003), "Arizona Winter School" (Tucson 2003): udział w projekcie "Model Theory and Diophantine Geometry", "Model Theory and Its Applications" (Ravello 2002), Warsztaty z teorii modeli (Barcelona 2001), Warsztaty z teorii modeli i budynków Titsa (Wuerzburg 2000), Logic Colloquium 2000 (Paryż).

Wyjazdy na zaproszenie z co najmniej jednym wykładem na seminarium
2015: Tygodniowa wizyta na University of Belgrade z udziałem w obronie doktoratu Slavko Moconji jako recenzent.
2015: Dwudniowa wizyta na Université Lyon 1 z udziałem w obronie doktoratu Adriane Kaïchouh jako recenzent.
2015: Trzydniowa wizyta na Universita degli Studi di Torino.
2015: Tygodniowa wizyta na Hebrew University of Jerusalem z wykładem tam oraz na Ben-Gurion University of the Nagev w Beer Shevie, współpraca z I. Kaplanem.
2015: Tygodniowa wizyta na University of Leeds, współpraca z D. Macphersonem.
2014: 10-dniowa wizyta na University of Notre Dame w USA, współpraca naukowa z A. Pillayem.
2014: Trzydniowa wizyta na University of Illinois at Urbana-Champaign w USA, współpraca z S. Soleckim.
2013: Trzydniowa wizyta na Universität Konstanz, współpraca z S. Kuhlmann i K. Dupont.
2013: Jednodniowa wizyta w Institut Henri Poincaré w Paryżu.
2011: Tygodniowy pobyt na Universita degli Studi di Torino, współpraca z R. Camerlem.
2010: Tygodniowa wizyta na University of Leeds, współpraca z A. Pillayem.
2009: Tygodniowa wizyta na University of Leeds, współpraca z A. Pillayem.
2008: Dwutygodniowy pobyt na Université Lyon 1, współpraca z F. Wagnerem.
2008: Pięciodniowy pobyt na Universita degli Studi di Torino, współpraca z R. Camerlem.
2008: Trzydniowy pobyt na University of Maryland at Collage Park.
2008: Jednodniowa wizyta na University of Illinois at Chicago.
2008: Tygodniowa wizyta na University of Leeds, współpraca z A. Pillayem.
2007: Tygodniowa wizyta na University of California at Berkeley.
2007: Jednodniowa wizyta na University of Illinois at Chicago.
2006: Jednodniowe wizyty na: University of Illinois at Chicago, University of Notre Dame, McMaster University.
2005: Jednodniowa wizyta na University of Wisconsin at Madison.
2004: Dwumiesięczny pobyt na Université Lyon 1, współpraca naukowa z F. Wagnerem i T. Blossierem.
2003: Miesięczny pobyt na University of Illinois at Urbana-Champaign, dwa wykłady na seminariach w Urbanie i jeden w Chicago.

7. Dydaktyka i opieka nad młodą kadrą naukową

Magistranci z matematyki teoretycznej

- **Jan Dobrowolski**: Magister w 2011; II nagroda w konkursie im. J. Marcinkiewicza za pracę magisterską pt. *On ω-categorical groups and generically stable types.*
- **Tomasz Gogacz**: Magister w 2011; II nagroda w konkursie im. J. Marcinkiewicza za pracę magisterską pt. *On quasi-minimal groups and fields.*

- **Tomasz Rzepecki**: Magister w 2014, III nagroda w konkursie im. J. Marcinkiewicza za pracę magisterską pt. *Smoothness of bounded invariant equivalence relations.*
- **Urszula Dobrowolska** napisała pod moim kierunkiem pracę magisterską pt. *On some properties of U-rank and $\mathcal{M}$-rank*, ale dotychczas nie zdała pisemnego egzaminu magisterskiego.

Doktoranci

- **Jan Dobrowolski**: Doktorat z wyróżnieniem w 2015, *Groups and rings in some model-theoretic and model-theory-motivated contexts.* Od marca 2015 przebywa na dwuletnim postdoku na Yonsei University w Seulu w Korei Południowej.
- **Tomasz Rzepecki**: Przewód doktorski otwarty w 2015, temat: *Bounded, invariant equivalence relations.*

Dydaktyka

- Wykłady monograficzne z ćwiczeniami: Struktury proskończone, Teoria stabilności, Grupy stabilne, Teorie proste.
- Wykłady kursowe: Wykład z algebry na informatyce (kilkukrotnie).
- Reading coursy: Teorie z własnością NIP.
- Seminaria: Seminarium z pracy Hrushovskiego i Loesera *Non-Archimedean tame topology and stably dominated types*, Seminarium na temat teorii zależnych i NTP_2.
- Ćwiczenia: Teoria modeli, Teoria modeli ciał oraz wielokrotnie Wstęp do matematyki, Algebra i Algebra liniowa.
- Wykłady w trakcie postdoka (niektóre kilkukrotnie): Linear Algebra, Advanced Calculus, Fundamental Mathematics, Mathematical Logic, Applied Linear Algebra.

8. Recenzje

Zrecenzowane habilitacje

- **Maciej Malicki**: habilitacja w 2015, IM PAN, tytuł dzieła habilitacyjnego: *Polish ultrametric spaces and their isomorphism groups.*

Zrecenzowane doktoraty

- **Adriane Kaïchouh**: doktorat w 2015, Université Lyon 1, Francja, promotorzy: prof. Itai Ben-Yaacov i prof. Julien Melleray; *Metric structures and their automorphism groups: reconstruction, homogeneity, amenability and automatic continuity.*
- **Slavko Moconja**: doktorat w 2015, University of Belgrade, Serbia, promotor: prof. Predrag Tanović; *Asymmetric regular types.*

Recenzje prac w czasopismach (w niektórych wielokrotne): Annals of Pure and Applied Logic, Archive for Mathematical Logic, Bulletin of the London Mathematical Society, Forum Mathematicum, Fundamenta Mathematicae, Journal of Symbolic Logic, Journal of the American Mathematical Society, Journal of the European Mathematical Society, Journal of the London Mathematical Society, Proceedings of Logic Colloquium, Proceedings of the American Mathematical Society, Topology and its Applications.

9. Działalność organizacyjna i inna

Udział w organizacji konferencji

- Konferencja "Model Theory in Wrocław 2012" (jeden z dwóch organizatorów).
- Konferencja "Model Theory in Wrocław" w 2009 (jeden z dwóch organizatorów).
- Konferencja "Model Theory" w Będlewie w 2009.
- Logic Colloquium 2007 we Wrocławiu w 2007.

Goście zaproszeni do Wrocławia na współpracę naukową i/lub wykłady na seminariach

2015 Artem Chernikov (Université Paris Diderot - Paris 7).
2014 Itay Kaplan (Hebrew University of Jerusalem), Dugald Macpherson (University of Leeds), Maciej Malicki (SGH).
2013 Anand Pillay (University of Leeds), Predrag Tanović (Mathematical Institute SANU, Belgrad, Serbia).
2011 Anand Pillay (University of Leeds).
2010 Davide Penazzi (University of Leeds), Frank Wagner (Université Lyon 1).
2009 Itai Ben-Yaccov (Université Lyon 1).
2008 Anand Pillay (University of Leeds).

Funkcje i członkostwa
2013 - : Członek jury Nagrody im. K. Kuratowskiego wybrany z ramienia PTM.

Udział w komisjach habilitacyjnych

- **Maciej Malicki**: postępowanie habilitacyjne w IM PAN zakończone w 2015 (moja funkcja: recenzent).
- **Tomasz Terlikowski**: postępowanie habilitacyjne na Uniwersytecie Wrocławskim zakończone w 2015 (moja funkcja: członek komisji).
- **Konrad Pióro**: postępowanie habilitacyjne na Uniwersytecie Jagiellońskim zakończone w 2013 (moja funkcja: członek komisji).

Udział w komisjach doktorskich: Irmina Czarna (moja funkcja: członek komisji), Jan Dobrowolski (moja funkcja: promotor), Grzegorz Jagiella (moja funkcja: przewodniczący komisji), Adriane Kaïchouh (moja funkcja: recenzent), Jakub Michaliszyn (moja funkcja: członek komisji), Slavko Moconja (moja funkcja: recenzent), Tomasz Rzepecki (moja funkcja: promotor), Piotr Witkowski (moja funkcja: członek komisji), Marek Szykuła (moja funkcja: członek komisji), Tomasz Gogacz (moja funkcja: członek komisji).

Obecnie pełnię funkcję przewodniczącego komisji do oceny zajęć z algebry i analizy na kierunku ISIM na Wydziale Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Wrocławskiego.

W latach 2010-2013 prowadziłem zajęcia w XIV LO we Wrocławiu, przygotowując młodzież uzdolnioną matematycznie do udziału w olimpiadach matematycznych. Ponadto wygłosiłem kilka odczytów w innych liceach oraz wykład na inaugurację roku akademickiego na Uniwersytecie Wrocławskim.